

Chủ đề 2: LUYỆN TẬP CÁC BÀI TOÁN PHỤ CỦA BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức

- củng cố các quy tắc và các phép biến đổi căn bậc hai.
- HS biết phối hợp các quy tắc và các phép biến đổi để làm bài toán phụ của bài toán rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

2. Về năng lực :

- Năng lực chung: Năng lực tự học, giải quyết vấn đề, tư duy, giao tiếp, hợp tác.
- Năng lực chuyên biệt: Năng lực tư duy và lập luận toán học. Năng lực giải quyết vấn đề.

3. Về phẩm chất:

- Tự tin, độc lập: Thông qua việc nêu cách làm, giải các bài tập, trình bày trước đám đông.
- Nhân ái: Biết giúp đỡ nhau trong học tập thông qua hoạt động nhóm, cặp đôi.
- Chăm chỉ: Miệt mài, chú ý lắng nghe, đọc, làm bài tập, vận dụng kiến thức vào thực hiện.
- Trách nhiệm: Trách nhiệm của học sinh khi thực hiện hoạt động học, báo cáo kết quả hoạt động của mình.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

- Thiết bị dạy học: Thước, bảng phụ, phấn màu
- Học liệu: SGK, SBT, STK

III. TIỀN TRÌNH BÀI DẠY

I. Lý thuyết:

A. Các dạng toán thường đi kèm với bài toán rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai gồm một số câu hỏi như sau :

- Giải phương trình, bất phương trình(so sánh với một số)
- Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất
- Tìm giá trị nguyên tương ứng với giá trị nguyên của biến

-

B. Phương pháp giải:

DẠNG 1: ĐƯA VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1.1. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.

Bước 2: Quy đồng mẫu chung

Bước 3: Bỏ mẫu, giải x, đối chiếu điều kiện và kết luận.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P = \frac{13}{3}$. ($x > 0$)

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } P = \frac{13}{3} &\Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{3(x + \sqrt{x} + 1)}{3\sqrt{x}} = \frac{13\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow 3x + 3\sqrt{x} + 3 = 13\sqrt{x} \Leftrightarrow 3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 9\sqrt{x} - \sqrt{x} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(3\sqrt{x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy $x = 9, x = \frac{1}{9}$ thì $P = \frac{13}{3}$.

Bài 2. Cho biểu thức $M = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$. Tìm x để $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \text{Có } M = \frac{\sqrt{x}}{8} &\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x}}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{8(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{8(\sqrt{x} - 2)} \\ &\Leftrightarrow 24 = x - 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 25 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -4 \text{ (loại)}, \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy $x = 36$ thì $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$.

1.2 PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- $|f(x)| = a$ (với $a > 0$ và a là số cụ thể) thì giải luôn hai trường hợp $|f(x)| = \pm a$.

- $|f(x)| = g(x)$ (với $g(x)$ là một biểu thức chứa x):

Cách 1: Xét 2 trường hợp để phá trị tuyệt đối:

Trường hợp 1: Xét $f(x) \geq 0$ thì $|f(x)| = f(x)$ nên ta được $f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) \geq 0$.

Trường hợp 2: Xét $f(x) < 0$ thì $|f(x)| = -f(x)$ nên ta được $-f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) < 0$.

Cách 2: Đặt điều kiện $g(x) \geq 0$ và giải hai trường hợp $f(x) = \pm g(x)$.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho 2 biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A = B \cdot |x-4|$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 25$.

$$\text{Có } A = B \cdot |x-4| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow |x-4| = \sqrt{x}+2.$$

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ thì $|x-4| = x-4$ nên ta được:

$$x-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: Xét $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ thì $|x-4| = -x+4$ nên ta được:

$$-x+4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Cách 2: Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 25$ nên $|x-4| = \sqrt{x}+2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \sqrt{x}+2 \\ x-4 = -\sqrt{x}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x}-6=0 \\ x+\sqrt{x}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa}$$

mãn).

Cách 3: Nhận xét $|x-4| = |(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)| = |\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2)$

$$\text{nên } |x-4| = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $x=9, x=1$ thì $A = B \cdot |x-4|$.

Bài 2. Cho 2 biểu thức $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $A = B \cdot |\sqrt{x}-3|$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{Có } A = B. |\sqrt{x} - 3| \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x}-1} = \frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow x-3 = |\sqrt{x}-3|.$$

Cách 1: Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$ thì $|\sqrt{x} - 3| = \sqrt{x} - 3$ nên ta được
 $\sqrt{x} - 3 = x - 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$ (loại).

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$ thì $|\sqrt{x} - 3| = -\sqrt{x} + 3$
nên ta được $\sqrt{x} - 3 = -x + 3 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$ thì $A = B. |\sqrt{x} - 3|$.

Cách 2: Điều kiện: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Khi đó $|\sqrt{x} - 3| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = x - 3 \\ \sqrt{x} - 3 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 0 \\ x + \sqrt{x} - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \\ (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện được $x = 4$.

1.3. ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG DẠNG $m^2 + n^2 = 0$ (HOẶC $m^2 + \sqrt{n} = 0$)

Bước 1 Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa phương trình về dạng

$$m^2 + n^2 = 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} = 0 \text{)}$$

Bước 2: Lập luận $m^2 \geq 0, n^2 \geq 0$ (hoặc $\sqrt{n} \geq 0$) nên

$$m^2 + n^2 \geq 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} \geq 0 \text{)}.$$

Bước 3: Khẳng định $m^2 + n^2 = 0$ (hoặc $m^2 + \sqrt{n} = 0$) chỉ xảy ra khi đồng thời:

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Bước 4: Giải ra x , đối chiếu điều kiện và kết luận.

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 4$.

$$\begin{aligned} \text{Có } P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \\ &\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x-4} = 0. \end{aligned}$$

Vì $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0, \sqrt{x-4} \geq 0$ nên $(\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} \geq 0$.

Do đó $(\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ \sqrt{x-4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

Vậy $x=4$ thì $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 2. Cho biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{CÓ } P.\sqrt{x} + x - 1 &= 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \\ &\Leftrightarrow x + 3 + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (x + 3 - 2\sqrt{3x}) + (x - 1 - 2\sqrt{x-2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{3x} + 3) + (x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Vì $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 \geq 0, (\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0$ nên $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0$.

Do đó $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0$ chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{3} \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x=3$ thì $P.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{CÓ } 81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow 81x^2 - 18x = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow 81x^2 - 18x + 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 5$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{9x}{\sqrt{x}} + \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 + \frac{9x-6\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Vì $(9x-1)^2 \geq 0$, $\frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$ nên $(9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$.

Do đó $(9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = 0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 9x-1=0 \\ 3\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì $81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4$.

1.4. ĐÁNH GIÁ VỀ NÀY $\geq$ MỘT SỐ, VỀ KIA $\leq$ SỐ ĐÓ

Bước 1: Đưa một vế về bình phương và sử dụng

$$A^2 \pm m \geq 0; -A^2 \pm m \leq 0 \pm m.$$

Bước 2: Đánh giá vế còn lại dựa vào bất đẳng thức quen thuộc như:

- Bất đẳng thức Cossi: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ hay $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Bunhia: $(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \forall a, b, x, y$.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Bước 3: Khẳng định phương trình chỉ xảy ra khi các dấu “=” ở bước 1 và bước 2 đồng thời xảy ra.

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = x\sqrt{x} - x$. Tìm x để

$$x^2 + 6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$$

Lời giải

Điều kiện: $1 < x \leq 3$.

$$\text{Có } x^2 + 6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6 = \frac{4}{\sqrt{x}-1} \cdot x(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \quad (*)$$

$$* \text{ Có VT } (*) = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2 \geq 2.$$

* Chứng minh $\text{VP}(*) \leq 2$:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cosi)

$$\begin{aligned} \text{Xét } [\text{VP}(*)]^2 &= x-1 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} + 3-x = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \\ &\leq 2 + 2 \cdot \frac{(x-1) + (3-x)}{2} = 4 \Rightarrow \text{VP}(*) \leq 2. \end{aligned}$$

Cách 2: (Dùng bất đẳng thức Bunhia cốpski)

$$\text{Xét } [\text{VP}(*)]^2 = (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-1 + 3-x) = 4 \Rightarrow \text{VP}(*) \leq 2.$$

Như vậy $\text{VT}(*) \geq 2$, $\text{VP}(*) \leq 2$ nên $(*)$ chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x=2$ thì $x^2 + 6 = A \cdot B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để

$$A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}.$$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 9$, $x \neq 4$.

$$\text{Có } A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow -x + 6\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \quad (*)$$

$$\text{Có } \text{VT}(*) = -x + 6\sqrt{x} - 9 + 5 = -(\sqrt{x}-3)^2 + 5 \leq 5.$$

Ta sẽ chứng minh $\text{VP}(*) \geq 5$

Cách 1: (Chỉ ra $[\text{VP}(*)]^2 \geq 25$)

$$\begin{aligned} \text{Xét } [\text{VP}(*)]^2 &= x+16 + 2\sqrt{(x+16)(9-x)} + 9-x \\ &= 25 + 2\sqrt{(x+16)(9-x)} \geq 25 \Rightarrow \text{VP}(*) \geq 5. \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$)

$$\text{Có } \text{VP}(*) = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \geq \sqrt{x+16+9-x} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \text{VP}(*) \geq 5.$$

Như vậy $\text{VT}(*) \leq 5$, $\text{VP}(*) \geq 5$ nên $(*)$ chỉ xảy ra khi

Do đó (*) chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-3=0 \\ \sqrt{(x+16)(9-x)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=9$ thì $A.(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$.

DẠNG 2: ĐƯA VỀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

2.1. ĐƯA VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0; \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.

Bước 2: Quy đồng mẫu chung, chuyển hết sang một vế để được dạng

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0; \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Bước 3: Giải các bất phương trình này, đối chiếu điều kiện và kết luận.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho $M = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Tìm x sao cho $M \leq 0$

Lời giải

Với $x > 0, x \neq 1$ ta có để $M \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

Mà $x > 0, x \neq 1$. Vậy $0 < x < 1$

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A < 1$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\text{Có } A < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$\Leftrightarrow 3$ và $\sqrt{x}-2$ trái dấu, mà $3 > 0$ nên ta được

$$\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4.$$

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3. Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $M \geq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } M \geq \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}+2)}{3(\sqrt{x}+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-7}{3(\sqrt{x}+2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-7 \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x}+2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 49 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy $x \geq 49$ thì $M \geq \frac{2}{3}$

Bài 4. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} * \text{ Để } \sqrt{P} \text{ xác định ta cần có } P \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x}+1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Khi đó } \sqrt{P} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}-2) - 1(\sqrt{x}+1)}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-9 < 0 \text{ (do } \sqrt{x}+1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 4$, ta được $4 \leq x < 9$.

2.2. ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG DẠNG $m^2 \leq 0; -m^2 \geq 0; m^2+n^2 \leq 0; m^2+\sqrt{n} \leq 0$.

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa bất phương trình về dạng

$$m^2 \leq 0; -m^2 \geq 0; m^2+n^2 \leq 0; m^2+\sqrt{n} \leq 0$$

Bước 2: lập luận để giải dấu “=” xảy ra

Bước 3: Giải ra x , đối chiếu điều kiện và kết luận.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho 2 biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $\frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Có } \frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B} &\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 5 \leq \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1} : \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \Leftrightarrow \frac{x}{4} + 5 \leq \sqrt{x} + 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{4} \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

Mà $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ nên $(\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0$ chỉ xảy ra khi $\sqrt{x} - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$ thì $\frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B}$.

Bài 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}}$. Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{a}}{8(\sqrt{a} + 1)} - \frac{(\sqrt{a} + 1)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} - \frac{8(\sqrt{a} + 1)}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-a + 6\sqrt{a} - 9}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $\frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \leq 0$ với mọi $a > 0$ nên $\frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0$ chỉ xảy ra khi

$$\sqrt{a} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow a = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a = 9$ thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1$

DẠNG 3: SO SÁNH, CHỨNG MINH BẰNG CÁCH XÉT HIỆU

Để chứng minh $X > Y$ ($X \geq Y$) ta chứng minh hiệu $X - Y > 0$ ($X - Y \geq 0$)

Để chứng minh $X < Y$ ($X \leq Y$) ta chứng minh hiệu $X - Y < 0$ ($X - Y \leq 0$)

Để so sánh hai biểu thức X và Y ta xét dấu của hiệu $X - Y$

Để so sánh P với P^2 ta xét hiệu $P - P^2 = P(1 - P)$ rồi thay x vào và xét dấu

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{a + 3}{2(\sqrt{a} + 1)}$. Chứng minh $A \geq 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a \geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Xét hiệu } A-1 &= \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)} - 1 = \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)} - \frac{2(\sqrt{a}+1)}{2(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{2(\sqrt{a}+1)} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{2(\sqrt{a}+1)} \geq 0 \quad \forall a \geq 0 \Rightarrow A \geq 1 \Rightarrow \text{dpcm.}\end{aligned}$$

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi $\left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2$, hãy so sánh B với 3.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$.

Khi $A > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}+3$ cùng dấu.

Mà $\sqrt{x}+3 > 0$ nên ta được $\sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ (thỏa mãn).

$$\begin{aligned}\text{Xét hiệu } B-3 &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 3 = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1} \geq 0 \quad \forall x > 1 \text{ nên } B \geq 3.\end{aligned}$$

Vậy khi $A > 0$ thì $B \geq 3$.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh

$$\left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2.$$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$.

$$\begin{aligned}\text{Xét hiệu } \left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5} + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 2 \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}} > 0, \text{ với mọi } x > 0, x \neq 1, x \neq 25\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2.$$

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$. So sánh $\frac{B}{A}$ và 3

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } \frac{B}{A} - 3 &= \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} : \frac{2\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x+1}} - 3 = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{3\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} - 3 \\ &= \frac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{3(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0 \text{ với mọi } x \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{B}{A} < 3$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$. So sánh P và P^2 .

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } P - P^2 &= P(1 - P) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \right) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{-3}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-2})^2} < 0 \quad \forall x \geq 0, x \neq 4 \text{ nên } P < P^2. \end{aligned}$$

Vậy $P < P^2$.

Bài 6. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh $\sqrt{P}$ và P .

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$\sqrt{P}$ xác định khi $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \geq 0$, mà $x > 0$ nên $\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

$$\text{Xét hiệu } \sqrt{P} - P = \sqrt{P}(1 - \sqrt{P}) = \sqrt{P} \cdot \frac{1 - P}{1 + \sqrt{P}}.$$

Do $\sqrt{P} \geq 0, 1 + \sqrt{P} > 0$

$$\text{và } 1 - P = 1 - \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \frac{x - \sqrt{x-2}}{x} = \frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{x} > 0, \forall x \geq 4.$$

suy ra $\sqrt{P} - P \geq 0$ nên $\sqrt{P} \geq P$.

Vậy $\sqrt{P} \geq P$.

DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

7.1 Dựa vào $x \geq 0$ để Tìm giá trị lớn nhất của $P = a + \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b > 0, c > 0$)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = a - \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b > 0, c > 0$)

Bước 1. Đặt điều kiện $x \geq 0$ và khử x ở tử để đưa P, Q về dạng trên.

Bước 2. Chuyển từng bước từ $\sqrt{x} \geq 0$ sang $P \leq a + \frac{b}{c}; Q \geq a - \frac{b}{c}$ như sau:

Max P	Min Q
Có $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$	Có $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow \sqrt{x+c} \geq c \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow \sqrt{x+c} \geq c \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow a + \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq a + \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow -\frac{b}{\sqrt{x+c}} \geq -\frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow P \leq a + \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0.$	$\Rightarrow a - \frac{b}{\sqrt{x+c}} \geq a - \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
	$\Rightarrow Q \geq a - \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0.$

Bước 3: Kết luận $\text{Max}P = a + \frac{b}{c}$, $\text{Min}Q = a - \frac{b}{c}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$. Từ đó, tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $Q = \frac{2}{P+3} + 3P$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

* Tìm MinP:

$$\text{Có } P = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{3}{1} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x+1}} \geq -3 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}} \geq 1 - 3 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow P \geq -2 \quad \forall x \geq 0$$

Vậy $\text{Min } P = -2$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

* Tìm MinQ:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cô Si)

$$\text{Có } Q = \frac{2}{P+3} + 3P = 2 \left[\frac{1}{P+3} + (P+3) \right] + P - 6$$

$$\text{Do } P \geq -2 \Rightarrow P+3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{P+3} + (P+3) \geq 2\sqrt{\frac{1}{P+3} \cdot (P+3)} = 2$$

$$\text{Vì } P \geq -2 \Rightarrow P-6 \geq -2-6 = -8 \Rightarrow Q \geq 4-8 = -4$$

Vậy $\text{Min}Q = -4$ khi $P = -2$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Cách 2: (Thay $P = -2$ được $Q = -4$ nên ta dự đoán $\text{Min}Q = -4$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } Q - (-4) &= \frac{2}{P+3} + 3P + 4 = \frac{2}{P+3} + \frac{(3P+4)(P+3)}{P+3} = \frac{3P^2 + 13P + 14}{P+3} \\ &= \frac{3P^2 + 6P + 7P + 14}{P+3} = \frac{3P(P+2) + 7(P+2)}{P+3} = \frac{(P+2)(3P+7)}{P+3} \end{aligned}$$

$$\text{Do } P \geq -2 \Rightarrow P+2 \geq 0, P+3 > 0, 3P+7 > 0 \Rightarrow Q - (-4) \geq 0 \Rightarrow Q \geq -4$$

Vậy $\text{Min}Q = -4$ khi $P = -2$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $N = M + \frac{12}{M}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

* Tìm Max M:

$$\text{Có } M = \frac{2\sqrt{x}+4+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+2}.$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{2}{2} \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq 2 + 1 \forall x \geq 0 \Rightarrow M \leq 3 \forall x \geq 0.$$

Vậy $\text{Max}M = 3$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

* Tìm MinN:

Cách 1 (Dùng bất đẳng thức Côsi)

$$\text{Có } N = M + \frac{12}{M} = \left(\frac{4M}{3} + \frac{12}{M} \right) - \frac{M}{3}.$$

$$\text{Do } 2\sqrt{x}+6 > 0, \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow \frac{4M}{3} + \frac{12}{M} \geq 2\sqrt{\frac{4M}{3} \cdot \frac{12}{M}} = 8.$$

$$\text{Vì } M \leq 3 \Rightarrow -\frac{M}{3} \geq -1 \Rightarrow N \geq 8-1 = 7.$$

Vậy $\text{Min}N = 7$ khi $M = 3$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2 (Thay $M = 3$ được $N = 7$ nên ta dự đoán $\min N = 7$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } N - 7 &= M + \frac{12}{M} - 7 = \frac{M^2 - 7M + 12}{M} = \frac{M^2 - 3M - 4M + 12}{M} \\ &= \frac{M(M-3) - 4(M-3)}{M} = \frac{(M-3)(M-4)}{M}. \end{aligned}$$

Do $0 < M \leq 3 \Rightarrow M - 3 \leq 0, M - 4 < 0, M > 0 \Rightarrow N - 7 \geq 0 \Rightarrow N \geq 7$.

Vậy $\min N = 7$ khi $M = 3$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x+3}}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $B = 3A + \frac{10}{A}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

*) Tìm MaxA:

Có $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{5}{3} \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{5}{3} \forall x \geq 0$$

Vậy MaxA = $\frac{5}{3}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

+) Tìm MinB:

Cách 1. (Dùng bất đẳng thức Cô si)

$$\text{Có } B = 3A + \frac{10}{A} = \left(\frac{18A}{5} + \frac{10}{A} \right) - \frac{3A}{5}$$

$$\text{Do } 5 > 0, \sqrt{x} + 3 > 0 \Rightarrow A = \frac{5}{\sqrt{x} + 3} > 0 \Rightarrow \frac{18A}{5} + \frac{10}{A} \geq 2\sqrt{\frac{18A}{5} \cdot \frac{10}{A}} = 12$$

$$\text{Vì } A \leq \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{3A}{5} \geq -1 \Rightarrow B \geq 12 - 1 = 11.$$

Vậy Min B = 11 khi $A = \frac{5}{3}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2. (Thay $A = \frac{5}{3}$ được $B = 11$ nên ta dự đoán $\min B = 11$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } B - 11 &= 3A + \frac{10}{A} - 11 = \frac{3A^2 - 11A + 10}{A} = \frac{3A^2 - 5A - 6A + 10}{A} \\ &= \frac{A(3A - 5) - 2(3A - 5)}{A} = \frac{(3A - 5)(A - 2)}{A} \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 \leq A \leq \frac{5}{3} \Rightarrow 3A - 5 \leq 0, A - 2 < 0, A > 0 \Rightarrow B - 11 \geq 0 \Rightarrow B \geq 11.$$

Vậy Min $B = 11$ khi $A = \frac{5}{3}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = -\frac{2}{\sqrt{x+4}}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $T = 14S + \frac{3}{S+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

* Tìm MinS:

$$\text{Có } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \sqrt{x} + 4 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 4} \leq \frac{2}{4} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x} + 4} \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow S \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \geq 0$$

Vậy $\text{Min}S = -\frac{1}{2}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

* Tìm MinT:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Côsi)

$$\text{Có } T = \left[12(S+1) + \frac{3}{S+1} \right] + 2S - 12$$

$$\text{Do } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow S+1 \geq \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 12(S+1) + \frac{3}{S+1} \geq 2\sqrt{12(S+1) \cdot \frac{3}{S+1}} = 12$$

$$\text{Vì } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2S \geq -1 \Rightarrow T \geq 12 - 1 - 12 = -1$$

Vậy $\text{Min}T = -1$ khi $S = -\frac{1}{2}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Cách 2: (Thay $S = -\frac{1}{2}$ được $T = -1$ nên ta dự đoán $\text{Min}T = -1$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } T - (-1) &= 14S + \frac{3}{S+1} + 1 = \frac{14S^2 + 15S + 4}{S+1} = \frac{14S^2 + 7S + 8S + 4}{S+1} \\ &= \frac{7S(2S+1) + 4(2S+1)}{S+1} = \frac{(2S+1)(7S+4)}{S+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2S+1 \geq 0, 7S+4 > 0, S+1 > 0 \Rightarrow T - (-1) \geq 0 \Rightarrow T \geq -1$$

Vậy $\text{Min}T = -1$ khi $S = -\frac{1}{2}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

4.2. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Bước 1: Khử x ở trên tử.

Bước 2: Dựa vào mẫu để thêm bớt hai vế với một số thích hợp.

Bước 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi $a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \forall a, b \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x} + 10}{\sqrt{x} + 2}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } A &= \frac{x - 4 - \sqrt{x} - 2 + 16}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \quad (\text{Mẫu là } \sqrt{x} + 2 \text{ nên } \sqrt{x} - 3 \text{ cần cộng thêm } 5) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A + 5 = (\sqrt{x} + 2) + \frac{16}{\sqrt{x} + 2}.$$

Vì $\sqrt{x} + 2 > 0, \frac{16}{\sqrt{x} + 2} > 0 \forall x \geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(\sqrt{x} + 2) + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x} + 2}} = 2\sqrt{16} = 8.$$

Suy ra $A + 5 \geq 8 \Rightarrow A \geq 3$.

Vậy $\min A = 3$ khi $(\sqrt{x} + 2) = \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Bài 2. Cho $x > 25$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x}{\sqrt{x} - 5}$

Lời giải

Với $x > 25$ thì M luôn xác định.

$$\text{Có } M = \frac{x}{\sqrt{x} - 5} = \frac{x - 25 + 25}{\sqrt{x} - 5} = \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} + \frac{25}{\sqrt{x} - 5} = \sqrt{x} + 5 + \frac{25}{\sqrt{x} - 5}.$$

$$\text{Xét } M - 10 = (\sqrt{x} + 5) + \frac{25}{\sqrt{x} - 5}.$$

Với $x > 25$ thì $\sqrt{x} - 5 > 0, \frac{25}{\sqrt{x} - 5} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x} - 5 + \frac{25}{\sqrt{x} - 5} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} - 5) \cdot \frac{25}{\sqrt{x} - 5}} = 2\sqrt{25} = 10$$

Suy ra $M - 10 \geq 10 \Rightarrow M \geq 20$.

Vậy $\min M = 20$ khi $\sqrt{x} - 5 = \frac{25}{\sqrt{x} - 5} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow x = 100$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{CÓ } A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right).$$

Vì $9\sqrt{x} > 0, \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\begin{aligned} 9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} &\geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \leq -6 \\ &\Rightarrow 1 - \left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \leq 1 - 6 = -5 \Rightarrow P \leq -5. \end{aligned}$$

Vậy $\text{Max} A = -5$ khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

4.3. ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG

- $A^2 \pm m \geq 0 \pm m; \quad A^2 + B^2 \pm m \geq 0 + 0 \pm m.$
- $-A^2 \pm m \leq 0 \pm m; \quad -A^2 - B^2 \pm m \leq 0 + 0 \pm m.$

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{CÓ } T &= P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} \\ &= (x+2-2\sqrt{2x}) + (x-1-2\sqrt{x-1}+1) = (\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $\text{Min} T = 0$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 2. Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{CÓ } T = P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$$

$$= (x+2-2\sqrt{2x}) + (x-1-2\sqrt{x-1}+1) = (\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0.$$

Vậy $\text{Min}T = 0$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Lời giải

$$A = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = 2\sqrt{x}+1.$$

$$B = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(x-1)+2(x-1)}{\sqrt{x}+2} \\ = \frac{(\sqrt{x}+2)(x-1)}{\sqrt{x}+2} = x-1.$$

$$\text{Suy ra } C = B - A = x - 2\sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x}-1)^2 - 3 \geq -3.$$

Vậy $\text{Min}C = -3$ khi $x = 1$ (thỏa mãn).

4.4. TÌM $x \in N$ ĐỂ BIỂU THỨC $A = \frac{1}{\sqrt{x}-m}$ ($m \in N^*$) LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

NHẤT

Chú ý: Tính chất $a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ chỉ đúng với a và b cùng dương hoặc cùng âm.

Ví dụ:

$$+) \sqrt{x} + 3 \geq 3 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} \forall x \geq 0 \text{ đúng vì } \sqrt{x}+3 \text{ và } 3 \text{ cùng dương.}$$

$$+) \sqrt{x} - 2 \geq -2 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{1}{-2} \forall x \geq 0 \text{ sai vì ta chưa biết } \sqrt{x}-2 \text{ và } -2 \text{ có cùng âm hay không.}$$

Phương pháp giải

*Tìm $\text{Max}A$: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-m > 0$ và $\sqrt{x}-m < 0$ thì $\text{Max}A$ xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-m > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > m \Rightarrow x > m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \geq m^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{x} - m \geq \sqrt{m^2 + 1} - m > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-m} \leq \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m} \Rightarrow A \leq \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}.$$

$$\text{Vậy } \text{Max}A = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m} \text{ khi } x = m^2 + 1.$$

*Tìm $\text{Min}A$: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-m > 0$ và $\sqrt{x}-m < 0$ thì $\text{Min}A$ xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-m < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < m \Rightarrow 0 < x < m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \in \{0; 1; 2; \dots; m^2 - 1\}$.

Trường hợp này có hữu hạn giá trị nên ta kẻ bảng để chọn $\text{min}A$.

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị:

a) lớn nhất.

b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \neq 4$.

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0$ và $\sqrt{x}-2 < 0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{5; 6; 7; \dots\} \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \geq \sqrt{5}-2$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{3}{\sqrt{5}-2} \Rightarrow A \leq \frac{3}{\sqrt{5}-2} = 6 + 3\sqrt{5}.$$

Vậy $\text{Max}A = 6 + 3\sqrt{5}$ khi $x = 5$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0$ và $\sqrt{x}-2 < 0$ thì MinA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

x	0	1	2	3
A	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$	$-6-3\sqrt{3}$

Vậy $\text{Min}A = -6 - 3\sqrt{3}$ khi $x = 3$ (thỏa mãn).

Bài 2. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị:

a) lớn nhất

b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \neq 9$.

$$\text{Có } P = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}.$$

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3 > 0$ và $\sqrt{x}-3 < 0$ thì MaxP xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{10; 11; 12; \dots\} \Rightarrow x \geq 10 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{10}$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3 \geq \sqrt{10}-3 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{5}{\sqrt{10}-3} \Rightarrow 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3} \leq 1 + \frac{5}{\sqrt{10}-3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{10} + 2}{\sqrt{10} - 3} = 16 + 5\sqrt{10}.$$

Vậy $MaxP = 16 + 5\sqrt{10}$ khi $x = 10$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - 3 > 0$ và $\sqrt{x} - 3 < 0$ thì $minP$ xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}$.

x	0	1	2	...	8
P	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{8+5\sqrt{2}}{7}$	...	$-14-10\sqrt{2}$

Vậy $MinP = -14 - 10\sqrt{2}$ khi $x = 8$ (thỏa mãn).

Bài 3. Tìm $x \in N$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị: a) lớn nhất

b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \neq 1$.

$$\text{Có } M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - 1 > 0$ và $\sqrt{x} - 1 < 0$ thì $MaxM$ xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$.

Mà $x \in N \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; \dots\} \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq \sqrt{2} - 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} + 1 \Rightarrow M \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy $MaxM = 2 + \sqrt{2}$ khi $x = 2$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - 1 > 0$ và $\sqrt{x} - 1 < 0$ thì $MinM$ xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$.

Mà $x \in N \Rightarrow x = 0 \Rightarrow MinM = \frac{0}{0-1} = 0$.

Vậy $MinM = 0$ khi $x = 0$ (thỏa mãn).

DẠNG 5: TÌM X ĐỂ P NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN

8.1. Tìm $x \in Z$ để $P = a + \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in Z (a, b, c, d \in Z)$

Bước 1 Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa P về dạng như trên.

Bước 2 Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Xét $x \in Z$ nhưng $\sqrt{x} \notin Z$

$\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x}+d}$ là số vô tỷ $\Rightarrow a + \frac{b}{c\sqrt{x}+d}$ là số vô tỷ
 $\Rightarrow P$ là số vô tỷ $\Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $P \in \mathbb{Z}$ khi $\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c\sqrt{x}+d \in U$ (b)

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0$

$$\text{Có } A = \frac{2\sqrt{x}+6-7}{\sqrt{x}+3} = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}+3$ là số vô tỷ

$\Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số vô tỷ $2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow A$ là số vô tỷ $\Rightarrow A \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $A \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ mà $\sqrt{x}+3 \geq 3$ nên ta được:

$$\sqrt{x}+3=7 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x=16$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên âm

Lời giải

$$M = \frac{\sqrt{x}-3+6}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$$

M nguyên âm khi $\begin{cases} M \in \mathbb{Z} \\ M < 0 \end{cases}$

• $M \in \mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ $1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow M$ là số vô tỷ $\Rightarrow M \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow M \in \mathbb{Z} \text{ khi } \frac{6}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

$\sqrt{x}-3$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$\sqrt{x}$	4	2	5	1	6	0	9	-3
x	16	4	25	1	36	0	81	ϕ

$$\Rightarrow x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

- $M < 0$:

Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	4	16	25	36	81
M	-1	-2	-7	7	4	3	2

Từ bảng trên ta được $x \in \{0; 1; 4\}$ thì M có giá trị là số nguyên âm

Cách 2: (Giải $M < 0$)

$$M < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \left(\text{do } \sqrt{x}+3 > 0 \right) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9$$

Kết hợp với $x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\}$ ta được $x \in \{0; 1; 4\}$

Vậy $x \in \{0; 1; 4\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

$$C\acute{o} P = \frac{2\sqrt{x}-4+4}{\sqrt{x}-2} = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}-2}$$

P nhận giá trị là một số tự nhiên khi $\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P \geq 0 \end{cases}$

- $P \in \mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-2$ là số vô tỷ

$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ $2 + \frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow P$ là số vô tỷ $\Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow P \in \mathbb{Z} \text{ khi } \frac{4}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

$\sqrt{x}-2$	1	-1	2	-2	4	-4
$\sqrt{x}$	3	1	4	0	6	-2
x	9	1	16	0	36	ϕ

$$\Rightarrow x \in \{0; 1; 9; 16; 36\} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

- $P \geq 0$:

Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	9	16	36
P	0	-2	6	4	3

Từ bảng trên ta được $x \in \{0; 9; 16; 36\}$ thì M có giá trị là một số tự nhiên

Cách 2 (Giải $P \geq 0$)

$$P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp với $x \in \{0; 1; 9; 16; 36\}$ ta được $x \in \{0; 9; 16; 36\}$

Vậy $x \in \{0; 9; 16; 36\}$ là các giá trị cần tìm

Bài 4. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $F = \frac{x-2}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 9$

$$\text{Có } F = \frac{x-9+7}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3 + \frac{7}{\sqrt{x}-3}$$

Trường hợp 1: Xét $x=2 \Rightarrow F=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x \neq 2$; $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ $\frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

Mà $x-2$ là số nguyên khác 0 nên $\frac{x-2}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow F$ là số vô tỷ $\Rightarrow F \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 3: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

Vì $\sqrt{x}+3 \in \mathbb{Z}$ nên $F \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{7}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

	1	-1	7	-7
	4	2	10	-4
x	16	4	100	

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy là các giá trị cần tìm

5.2. TÌM $x \in \mathbb{R}$ **ĐỂ** $P = \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Bước 1 Đặt điều kiện và chặn hai đầu của P :

- $a > 0, b\sqrt{x} + c > 0 \Rightarrow P > 0$.
- $b\sqrt{x} + c \geq c \Rightarrow \frac{a}{b\sqrt{x} + c} \leq \frac{a}{c} \Rightarrow P \leq \frac{a}{c}$.

Như vậy ta chặn hai đầu của P là $0 < P \leq \frac{a}{c}$.

Bước 2 Chọn $P \in \mathbb{Z}, 0 < P \leq \frac{a}{c}$. Từ đó suy ra x .

CÁC BÀI TẬP MẪU.

Bài 1. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên :

$$a) A = \frac{10}{\sqrt{x} + 3}$$

$$b) P = \frac{5}{3\sqrt{x} + 2}$$

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0$

a) Vì $10 > 0, \sqrt{x} + 3 > 0$ nên $A > 0$

Mặt khác, $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{10}{3} \Rightarrow A \leq \frac{10}{3}$

Do đó $0 < A \leq \frac{10}{3}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x}+3}=1 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=2 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10=\sqrt{x}+3 \\ 10=2\sqrt{x}+6 \\ 10=3\sqrt{x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=7 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=49 \\ x=4 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x \in \left\{49; 4; \frac{1}{9}\right\}$ là giá trị cần tìm.

b) Vì $5 > 0, 3\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $P > 0$

Mặt khác $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{3\sqrt{x} + 2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$

Do $0 < P \leq \frac{5}{2}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} P=1 \\ P=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{3\sqrt{x}+2}=1 \\ \frac{5}{3\sqrt{x}+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=3\sqrt{x}+2 \\ 5=6\sqrt{x}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{36} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{1; \frac{1}{36}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau có giá trị là số nguyên

$$a) A = \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$b) P = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{a) Có } A = \frac{2\sqrt{x}+2+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi $B = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z}$

Vì $3 > 0, \sqrt{x}+1 > 0$ nên $B > 0$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \leq 3$$

Do đó: $0 < B \leq 3 \Rightarrow B \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} B=1 \\ B=2 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+1}=1 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=2 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{x}+1 \\ 3=2\sqrt{x}+2 \\ 3=3\sqrt{x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{4}; 4\right\}$ là các giá trị cần tìm.

$$\text{b) Có } P = \frac{\sqrt{x}+2-5}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}. \text{ Vì } 1 \in \mathbb{Z} \text{ nên } P \in \mathbb{Z} \text{ khi } Q = \frac{5}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z}$$

Vì $5 > 0; \sqrt{x}+2 > 0$ nên $Q > 0$

$$\text{Mặt khác ta có } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow Q \leq \frac{5}{2}$$

Do đó, $0 < Q \leq \frac{5}{2} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} Q=1 \\ Q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x}+2}=1 \\ \frac{5}{\sqrt{x}+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2=5 \\ \sqrt{x}+2=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}, 9\right\}$ là các giá trị cần tìm.

DẠNG 6: TÌM THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH $P = m$ CÓ NGHIỆM

Bước 1: Đặt điều kiện để P xác định

Bước 2: Từ $P = m$ rút $\sqrt{x}$ theo m .

Bước 3: Dựa vào điều kiện của x để giải m .

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình $P = m$ có nghiệm

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\text{Có } P = m \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = m \Rightarrow m(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}-1 \Rightarrow (m-1)\sqrt{x} = -2m-1.$$

* Xét $m=1 \Rightarrow 0.\sqrt{x} = -3$ (loại)

$$* \text{Xét } m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-2m-1}{m-1}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{-2m-1}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m-1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1. \text{ Vậy } -\frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương

trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0, x \neq 4$

$$\text{Có } \frac{A}{B} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m(\sqrt{x}+2) = 8 \Rightarrow m\sqrt{x} = 8-2m$$

* Xét $m=0 \Rightarrow 0.\sqrt{x} = 8$ (loại)

$$* \text{Xét } m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{8-2m}{m}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} \neq 2$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{8-2m}{m} \geq 0, \frac{8-2m}{m} \neq 2$

$$+ \text{Giải } \frac{8-2m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Giải } \frac{8-2m}{m} \neq 2 \Leftrightarrow 8-2m \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 2$$

Như vậy $0 < m \leq 4, m \neq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 3; 4\}$

Vậy $m \in \{1; 3; 4\}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 7: Tìm x để $|A| = A, |A| = -A, |A| > A, |A| < -A$

Ghi nhớ:

• $ A = A \Leftrightarrow A \geq 0$	• $ A > A \Leftrightarrow A < 0$
--------------------------------------	-----------------------------------

• $ A = -A \Leftrightarrow A \leq 0$	• $ A > -A \Leftrightarrow A > 0$
---------------------------------------	------------------------------------

CÁC BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $|P| > P$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Có $|P| > P$ khi $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}, \sqrt{x}-2$ trái dấu.

- $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$ (thỏa mãn điều kiện)
- $\begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases}$ (loại).

Vậy $0 < x < 4$ thì $|P| > P$

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất để $|A| = -A$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$\text{Có } A = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

Cách 1 (sử dụng $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$)

$$\text{Có } |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \leq 0$$

Mà $\sqrt{x}+3 > 0$ nên ta được $\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$

Kết hợp với điều kiện, ta được $0 \leq x < 9$. Do $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.

Cách 2 (Xét hai trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối)

$$\text{Có } |A| = -A \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \right| = -\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow |\sqrt{x}-3| = -\sqrt{x}+3$$

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x}-3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$ (do $x \neq 9$) thì

$$|\sqrt{x}-3| = -\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = -\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9$ (do $x \neq 9$) thì

$$|\sqrt{x}-3| = -\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow -\sqrt{x}+3 = -\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó ta được $0 \leq x < 9$. Do $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.
 Vậy $x = 8$ là giá trị cần tìm

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$

- Nêu điều kiện xác định và rút biểu thức A
- Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$

Lời giải

- Điều kiện $0 < x \neq 1$

Với điều kiện đó, ta có: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

- Để $A = \frac{1}{3}$ thì $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = \frac{9}{4}$ thì $A = \frac{1}{3}$

- Ta có $P = A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương ta có: $9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$

Suy ra: $P \leq -6 + 1 = -5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$

Bài 2. 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$. Tính giá trị của A khi $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0; x \neq 16$)

3) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức $B(A - 1)$ là số nguyên

Lời giải

1) Với $x = 36$ (Thỏa mãn $x \geq 0$), Ta có : $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Ta có: $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
X	17	15	18	14

Kết hợp ĐK $x \geq 0, x \neq 16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$

Bài 3. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện của x để M có nghĩa và rút gọn M .
- Tìm x để $M = 5$
- Tìm giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a.ĐK $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$M = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$M = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \Leftrightarrow M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$\begin{aligned}
b.. M = 5 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} = 5 \\
&\Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 5(\sqrt{x} - 3) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 5\sqrt{x} - 15 \\
&\Leftrightarrow 16 = 4\sqrt{x} \\
&\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x = 16
\end{aligned}$$

Đổi chiều ĐK: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ Vậy $x = 16$ thì $M = 5$

$$d. M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3 + 4}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$$

Để $M \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x} - 3 \in U_{(4)} \Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

$\Rightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$ Kết hợp điều kiện $x \neq 4 \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$

Bài 4. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ Với $a > 0$ và $a \neq 1$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm a để $P < 0$

Lời giải

- Với $a > 0$ và $a \neq 1$

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right) = \left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2 - (\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}$$

$$P = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \frac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{-(a-1)4\sqrt{a}}{4a} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1-a}{\sqrt{a}} \text{ Với } a > 0 \text{ và } a \neq 1$$

- Tìm a để $P < 0$

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $\sqrt{a} > 0$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1-a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1-a < 0 \Leftrightarrow a > 1 \text{ (TMĐK)}$$

Bài 5. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để P = -1

c) Tìm m để với mọi giá trị x > 9 ta có: $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

Lời giải

a) Ta có: $x-2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$

$$\bullet \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ 4-x \neq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

• Với x > 0 và x ≠ 4 ta có:

P =

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{8x}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ & = \frac{4x-8x-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{-4x-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ & = \frac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}} = \frac{-4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)} = \frac{4x}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Với x > 0, x ≠ 4, x ≠ 9 thì P = $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b) P = -1 (ĐK: x > 0, x ≠ 4, x ≠ 9)

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3-\sqrt{x} \Leftrightarrow 4x-3-\sqrt{x} = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = y$ đk y > 0

Ta có phương trình: $4y^2 - y - 3 = 0$ Các hệ số: a + b + c = 4 - 1 - 3 = 0

$$\Rightarrow y_1 = -1 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD } y > 0), \quad y_2 = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn ĐKXD } y >$$

0)

$$\text{Với } y = \frac{3}{4} = \sqrt{x} \text{ thì } x = \frac{9}{16} \text{ (thỏa mãn đkxd)}$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{9}{16} \text{ thì } P = -1$$

$$c) \quad m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1 \quad (\text{đk: } x > 0; x \neq 4, x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x} - 3) \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} > x + 1 \Leftrightarrow m \cdot 4x > x + 1 \Leftrightarrow m > \frac{x+1}{4x} \quad (\text{Do } 4x >$$

0)

$$\bullet \text{ Xét } \frac{x+1}{4x} = \frac{x}{4x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x}$$

Có $x > 9$ (Thoả mãn ĐKXD)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{9} \quad (\text{Hai phân số dương cùng tử số, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì}$$

nhỏ hơn)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4x} < \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{5}{18}$$

$$\text{Theo kết quả phần trên ta có : } \begin{cases} \frac{5}{18} > \frac{x+1}{4x} \\ m > \frac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{18}$$

Kết luận: Với $m \geq \frac{5}{18}, x > 9$ thì $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$

Bài 6. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

$$a) \text{ Chứng minh rằng } P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$b) \text{ Tìm các giá trị của } x \text{ để } 2P = 2\sqrt{x} + 5$$

Lời giải

$$a) P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Từ câu 2a ta có

$$2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \quad \text{và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \quad \text{và } x > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Bài 7. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 9$)

1) Rút gọn A

2) Tìm x để $A = \frac{-1}{3}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Lời giải

$$1) A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right) \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 9)$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \dots = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

Vậy $x = 36$

2) Ta có:

$$A = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}. \text{ Mà } \sqrt{x}+3 \geq 3 \quad (\text{do } \sqrt{x} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \geq -3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow A \geq -1$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy: Min $A = -1$ (khi $x = 0$)

Bài 8. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{1-\sqrt{a}}$ (với $a > 0; a$

$\neq 1$)

a. Rút gọn A.

b. Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \left(\frac{1+\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{1-a} \right) : \left(\frac{1+\sqrt{a}-1+\sqrt{a}}{1-a} \right) + \frac{1}{1-\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}-a}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \text{ nên } \sqrt{a} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3}} = \frac{-1}{5 + 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{3}).$$

Bài 9. Cho biểu thức: $P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của x để biểu thức P có nghĩa thì biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - \frac{(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + 2 = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Thay vào biểu thức } P = 2(\sqrt{2}-1) + 2 + \frac{2}{\sqrt{2}-1}$$

$$\text{Tính được kết quả } P = 4\sqrt{2} + 2$$

$$\text{c) Đưa được } \frac{7}{P} = \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}$$

Đánh giá $2x+2+2\sqrt{x} > 6\sqrt{x}$, suy ra $0 < \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}} < \frac{7}{6}$

Vậy $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên đó là 1 khi

$$7\sqrt{x} = 2x + 2 + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 10. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

1. Rút gọn P

2. Tính giá trị của x khi $P = 3$

Lời giải

$$1/ \text{ Ta có: } P = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$= \left(\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$\frac{x-\sqrt{x}+1-x+1}{\sqrt{x}-1} : \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} : \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{2-\sqrt{x}}{x}$$

$$2/ \text{ Với } P = 3 \text{ ta có } \frac{2-\sqrt{x}}{x} = 3$$

$$\Rightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = -1(\text{loại}); \sqrt{x} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Bài 11. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right)$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a. Biểu thức P có nghĩa khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{2} - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

b) Đkxđ : $x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})} \right] \left[\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \right] \\ &= \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{(x-1) - 2} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - x + 1} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{x-3} \right) \cdot \frac{-(\sqrt{2} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(-1)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c) Thay $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ vào biểu thức $P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} = \frac{\sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1|}{|\sqrt{2} - 1|} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Bài 12. Cho biểu thức:

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$$

a). Tìm điều kiện xác định và rút gọn P.

b). Tìm cặp số (x ; y) nguyên thoả mãn phương trình $P = 2$.

Lời giải

a). Điều kiện xác định P là $x \geq 0 ; y \geq 0 ; y \neq 1 ; x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(x - y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ \Rightarrow &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ \Rightarrow &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{y})} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Vậy P = $\sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$.**

$\Rightarrow$

b) ĐKXD: $x \geq 0 ; y \geq 0 ; y \neq 1 ; x + y \neq 0$

$\Rightarrow P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1$

$\Rightarrow \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$

$\Rightarrow$ Ta có: $1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$

$\Rightarrow$ Thay $x = 0; 1; 2; 3; 4$ ta được các cặp số $(x; y)$ là $(4; 0)$ và $(2; 2)$.

Bài 13. Cho biểu thức: $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - (1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$

a) Rút gọn Q

b) Xác định giá trị của Q khi $a = 3b$

Lời giải

a) Rút gọn:

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - (1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{(\sqrt{a - b})^2}{\sqrt{(a - b)(a + b)}} = \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}}$$

b) Khi có $a = 3b$ ta có: $Q = \frac{\sqrt{3b - b}}{\sqrt{3b + b}} = \sqrt{\frac{2b}{4b}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 14. Cho biểu thức

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

a) Rút gọn A;

b) Biết $xy = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

Lời giải

Đkxđ : $x > 0, y > 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x + y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x + y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)}{\sqrt{xy}(x + y)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

b) Ta có $\left(\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}.$

Do đó $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (vì $xy = 16$)

Vậy min $A = 1$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4.$