

CHỦ ĐỀ 1 – RÚT GỌN BIỂU THỨC

DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC:.....	1
DẠNG 2: CHO GIÁ TRỊ CỦA x . TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC.....	3
DẠNG 3: ĐƯA VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH.....	4
DẠNG 4: ĐƯA VỀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH.....	11
DẠNG 6: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC.....	17
DẠNG 7: TÌM x ĐỂ P NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN.....	25
DẠNG 8: TÌM THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH $P = m$ CÓ NGHIỆM.....	29
HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ	31

DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC:

Bước 1 Đặt điều kiện xác định của biểu thức:

- $\frac{1}{\sqrt{x}-a}$ ($a > 0$): Điều kiện xác định là $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq a^2 \end{cases}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}+a}$ ($a > 0$): Điều kiện là $x \geq 0$
- Gặp phép chia phân thức thì đổi thành phép nhân sẽ xuất hiện thêm mẫu mới nên dạng này ta thường làm bước đặt điều kiện sau.

Bước 2 Phân tích mẫu thành tích, quy đồng mẫu chung.

Bước 3 Gộp tử, rút gọn và kết luận.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$\begin{aligned} \text{Có } A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0, x \neq 9$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$

Lời giải

$$\text{Có } x+\sqrt{x}-6 = x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6 = \sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)$$

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$

$$\begin{aligned}
\text{Có } A &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} - \frac{9\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x+4\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-4-9\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \\
\text{Vậy: } A &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \text{ với điều kiện } x \geq 0, x \neq 4
\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Có } P &= 1 : \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
&= 1 : \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= 1 : \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = 1 : \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= 1 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}. \text{ Điều kiện } x > 0, x \neq 1.
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

Chú ý: Câu này có phép chia phân thức nên đoạn cuối xuất hiện thêm $\sqrt{x}$ ở mẫu, do đó ta làm bước đặt điều kiện sau.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Có } P &= \left[\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \left(\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right) \\
&= \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\
&= \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\
&= \frac{a+2\sqrt{a}+1-a-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Điều kiện $a > 0, a \neq 1$

Vậy $P = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$ với điều kiện $a > 0, a \neq 1$.

DẠNG 2: CHO GIÁ TRỊ CỦA X. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Bước 1 Đặt điều kiện và chỉ ra giá trị đã cho của x thỏa mãn điều kiện.

Bước 2 Tính $\sqrt{x}$ rồi thay giá trị của x, $\sqrt{x}$ vào biểu thức đã rút gọn.

Bước 3 Tính kết quả của biểu thức bằng cách trục hết căn thức ở mẫu và kết luận.

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ khi:

a) $x = 36$

b) $x = 6 - 2\sqrt{5}$

c) $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

d) $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

e) $x = \frac{6}{3 - \sqrt{7}} - 2\sqrt{7} - \frac{\sqrt{28} - \sqrt{21}}{2 - \sqrt{3}}$

f) $x = \frac{4}{\sqrt{3} + 2} - \frac{4}{\sqrt{3} - 2}$

g) $x = \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-1}}{18}$

h) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$

a) Có $x = 36$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = 6$ thay vào P ta được $P = \frac{6+1}{6-2} = \frac{7}{4}$.

Vậy $P = \frac{7}{4}$ khi $x = 36$.

b) Có $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$ thỏa mãn điều kiện

Khi đó $\sqrt{x} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$ (do $\sqrt{5} > 1$)

Thay vào P ta được $P = \frac{\sqrt{5} - 1 + 1}{\sqrt{5} - 1 - 2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3} = -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{4}$

Vậy $P = -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{4}$ khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

c) Có $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ (do $\sqrt{3} > 1$).

Thay vào P ta được $P = \frac{\sqrt{3} - 1 + 1}{\sqrt{3} - 1 - 2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Vậy $P = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ khi $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

d) Có $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$ thỏa mãn điều kiện

Khi đó $\sqrt{x} = \left|\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ (do $\sqrt{3} > 1$)

Thay vào P , ta được $P = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-5} = -\frac{4+3\sqrt{3}}{11}$

Vậy $P = -\frac{4+3\sqrt{3}}{11}$ khi $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

e) Có $x = \frac{6}{3-\sqrt{7}} - 2\sqrt{7} - \frac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}} = \frac{6(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} - 2\sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}$
 $= \frac{18+6\sqrt{7}}{9-7} - 3\sqrt{7} = 9$ (Thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow \sqrt{x} = 3$.

Thay vào P , ta được: $P = \frac{3+1}{3-2} = 4$.

Vậy $P = 4$ khi $x = \frac{6}{3-\sqrt{7}} - 2\sqrt{7} - \frac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}$.

f) Có $x = \frac{4}{\sqrt{3}+2} - \frac{4}{\sqrt{3}-2} = \frac{4(\sqrt{3}-2)-4(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{-16}{3-4} = 16$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = 4$ thay vào P , ta được $P = \frac{4+1}{4-2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $P = \frac{5}{2}$ khi $x = \frac{4}{\sqrt{3}+2} - \frac{4}{\sqrt{3}-2}$.

g) Có $x = \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-1}}{18} = \frac{3-1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

Khi đó $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, thay vào P , ta được $P = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-2} = -\frac{4}{5}$.

Vậy $P = -\frac{4}{5}$ khi $x = \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-1}}{18}$.

h) Có $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 10 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2, \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 4$ (loại), $x = 25$ (thỏa mãn).

Khi đó $\sqrt{x} = 5$, thay vào P ta được $P = \frac{5+1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$.

Vậy $P = 2$ khi x thỏa mãn $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$.

DẠNG 3: ĐƯA VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.

Bước 2: Quy đồng mẫu chung

Bước 3: Bỏ mẫu, giải x , đối chiếu điều kiện và kết luận.

Đưa về phương trình tích

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P = \frac{13}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } P = \frac{13}{3} &\Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{3(x + \sqrt{x} + 1)}{3\sqrt{x}} = \frac{13\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow 3x + 3\sqrt{x} + 3 = 13\sqrt{x} \Leftrightarrow 3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 9\sqrt{x} - \sqrt{x} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(3\sqrt{x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy $x = 9, x = \frac{1}{9}$ thì $P = \frac{13}{3}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $M = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$. Tìm x để $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \text{Có } M = \frac{\sqrt{x}}{8} &\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x}}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{8(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{8(\sqrt{x} - 2)} \\ &\Leftrightarrow 24 = x - 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 25 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -4 \text{ (loại), } \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \\ \text{Vậy } x = 36 &\text{ thì } M = \frac{\sqrt{x}}{8}. \end{aligned}$$

Phương trình có chứa trị tuyệt đối

- $|f(x)| = a$ (với $a > 0$ và a là số cụ thể) thì giải luôn hai trường hợp $|f(x)| = \pm a$.
- $|f(x)| = g(x)$ (với $g(x)$ là một biểu thức chứa x):

Cách 1: Xét 2 trường hợp để phá trị tuyệt đối:

Trường hợp 1: Xét $f(x) \geq 0$ thì $|f(x)| = f(x)$ nên ta được $f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) \geq 0$.

Trường hợp 2: Xét $f(x) < 0$ thì $|f(x)| = -f(x)$ nên ta được $-f(x) = g(x)$.

Giải và đối chiếu điều kiện $f(x) < 0$.

Cách 2: Đặt điều kiện $g(x) \geq 0$ và giải hai trường hợp $f(x) = \pm g(x)$.

Ví dụ 1. Cho 2 biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A = B \cdot |x-4|$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 25$.

$$\text{Có } A = B \cdot |x-4| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow |x-4| = \sqrt{x}+2.$$

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ thì $|x-4| = x-4$ nên ta được:

$$x-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: Xét $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ thì $|x-4| = -x+4$ nên ta được:

$$-x+4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Cách 2: Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 25$ nên $|x-4| = \sqrt{x}+2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \sqrt{x}+2 \\ x-4 = -\sqrt{x}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x}-6=0 \\ x+\sqrt{x}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=0 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Cách 3: Nhận xét $|x-4| = |(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)| = |\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2)$

$$\text{nên } |x-4| = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $x=9, x=1$ thì $A = B \cdot |x-4|$.

Ví dụ 2. Cho 2 biểu thức $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $A = B \cdot |\sqrt{x}-3|$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{Có } A = B \cdot |\sqrt{x}-3| \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x}-1} = \frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow x-3 = |\sqrt{x}-3|.$$

Cách 1: Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$ thì $|\sqrt{x} - 3| = \sqrt{x} - 3$ nên ta được

$$\sqrt{x} - 3 = x - 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1 (\text{loại}).$$

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$ thì $|\sqrt{x} - 3| = -\sqrt{x} + 3$

$$\text{nên ta được } \sqrt{x} - 3 = -x + 3 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $x = 4$ thì $A = B \cdot |\sqrt{x} - 3|$.

Cách 2: Điều kiện: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Khi đó $|\sqrt{x} - 3| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = x - 3 \\ \sqrt{x} - 3 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 0 \\ x + \sqrt{x} - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \\ (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện được $x = 4$.

Đưa về bình phương dạng $m^2 + n^2 = 0$ (hoặc $m^2 + \sqrt{n} = 0$)

Bước 1 Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa phương trình về dạng

$$m^2 + n^2 = 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} = 0 \text{)}$$

Bước 2: Lập luận $m^2 \geq 0, n^2 \geq 0$ (hoặc $\sqrt{n} \geq 0$) nên

$$m^2 + n^2 \geq 0 \text{ (hoặc } m^2 + \sqrt{n} \geq 0 \text{)}.$$

Bước 3: Khẳng định $m^2 + n^2 = 0$ (hoặc $m^2 + \sqrt{n} = 0$) chỉ xảy ra khi đồng thời

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Bước 4: Giải ra x , đối chiếu điều kiện và kết luận.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 4$.

$$\text{Có } P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4}$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x - 4} = 0.$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0, \sqrt{x - 4} \geq 0 \text{ nên } (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x - 4} \geq 0.$$

$$\text{Do đó } (\sqrt{x} - 2)^2 + \sqrt{x - 4} = 0 \text{ chỉ xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{x} - 2 = 0 \\ \sqrt{x - 4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4}.$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{x + 3}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x - 2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\text{Có } P. \sqrt{x} + x - 1 &= 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \\
&\Leftrightarrow x + 3 + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (x + 3 - 2\sqrt{3x}) + (x - 1 - 2\sqrt{x-2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{3x} + 3) + (x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 \geq 0, (\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0 \text{ nên } (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0.$$

Do đó $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{x-2} - 1)^2 = 0$ chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{3} \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = 3$ thì $P. \sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Có } 81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow 81x^2 - 18x = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow 81x^2 - 18x + 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 5$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{9x}{\sqrt{x}} + \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 + \frac{9x-6\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\text{Vì } (9x-1)^2 \geq 0, \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0 \text{ nên } (9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0.$$

$$\text{Do đó } (9x-1)^2 + \frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ chỉ xảy ra khi } \begin{cases} 9x-1=0 \\ 3\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì $81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4$.

Đánh giá về này $\geq$ một số, về kia $\leq$ số đó

Bước 1: Đưa một vế về bình phương và sử dụng

$$A^2 \pm m \geq 0; -A^2 \pm m \leq 0 \pm m.$$

Bước 2: Đánh giá về còn lại dựa vào bất đẳng thức quen thuộc như:

- Bất đẳng thức Cosi: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ hay $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Bunhia: $(a.x+b.y)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \forall a, b, x, y.$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \forall a \geq 0, b \geq 0.$

Dấu “=” xảy ra khi $a=0$ hoặc $b=0.$

Bước 3: Khẳng định phương trình chỉ xảy ra khi các dấu “=” ở bước 1 và bước 2 đồng thời xảy ra.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = x\sqrt{x}-x.$ Tìm x để $x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$

Lời giải

Điều kiện: $1 < x \leq 3.$

$$\text{Có } x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+6 = \frac{4}{\sqrt{x}-1} \cdot x(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+6 = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \quad (*)$$

$$* \text{ Có VT } (*) = x^2-4x+4+2 = (x-2)^2+2 \geq 2.$$

* Chứng minh VP(*) ≤ 2 :

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cosi)

$$\begin{aligned} \text{Xét } [VP(*)]^2 &= x-1+2\sqrt{(x-1)(3-x)}+3-x = 2+2\sqrt{(x-1)(3-x)} \\ &\leq 2+2 \cdot \frac{(x-1)+(3-x)}{2} = 4 \Rightarrow VP(*) \leq 2. \end{aligned}$$

Cách 2: (Dùng bất đẳng thức Bunhia cópxki)

$$\text{Xét } [VP(*)]^2 = (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x})^2 \leq (1^2+1^2)(x-1+3-x) = 4 \Rightarrow VP(*) \leq 2.$$

Như vậy VT(*) ≥ 2 , VP(*) ≤ 2 nên (*) chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x=2 \text{ thì } x^2+6 = A.B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$ Tìm x để $A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}.$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 9, x \neq 4.$

$$\text{Có } A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow -x+6\sqrt{x}-4 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \quad (*)$$

$$\text{Có VT} (*) = -x+6\sqrt{x}-9+5 = -(\sqrt{x}-3)^2+5 \leq 5.$$

Ta sẽ chứng minh VP(*) ≥ 5

Cách 1: (Chỉ ra $[VP(*)]^2 \geq 25$)

$$\begin{aligned} \text{Xét } [VP(*)]^2 &= x+16+2\sqrt{(x+16)(9-x)}+9-x \\ &= 25+2\sqrt{(x+16)(9-x)} \geq 25 \Rightarrow VP(*) \geq 5. \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0$)

Có $VP(*) = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \geq \sqrt{x+16+9-x} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow VP(*) \geq 5$.

Như vậy $VT(*) \leq 5$, $VP(*) \geq 5$ nên $(*)$ chỉ xảy ra khi

Do đó $(*)$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-3=0 \\ \sqrt{(x+16)(9-x)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=9$ thì $A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x+4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$.

DẠNG 4: ĐƯA VỀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Đưa về bất phương trình dạng $\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0; \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định.

Bước 2: Quy đồng mẫu chung, chuyển hết sang một vế để được dạng

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0; \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Bước 3: Giải các bất phương trình này, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Một số tình huống thường gặp

+) $\frac{-3}{\sqrt{x}-2} > 0 \Leftrightarrow -3$ và $\sqrt{x}-2$ cùng dấu.

Vì $-3 < 0$ nên ta được $\sqrt{x}-2 < 0$ và giải ra $0 \leq x < 4$.

+) $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \leq 0$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên ta được $\sqrt{x}-3 \leq 0$ và giải ra $0 \leq x \leq 9$.

+) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}$ và $\sqrt{x}-4$ trái dấu, rồi giải hai trường hợp:

$$\begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x}-4 > 0 \end{cases} \text{ trường hợp này vô nghiệm.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-4 < 0 \end{cases} \text{ trường hợp này giải được } 0 < x < 16.$$

+) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \geq 0$ giải hai trường hợp:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-1 \geq 0 \\ \sqrt{x}-5 > 0 \end{cases} \text{ trường hợp này giải được } x > 25.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}-1 \leq 0 \\ \sqrt{x}-5 < 0 \end{cases} \text{ trường hợp này giải được } 0 \leq x \leq 1.$$

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A < 1$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\text{Có } A < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$\Leftrightarrow 3$ và $\sqrt{x}-2$ trái dấu, mà $3 > 0$ nên ta được

$$\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4.$$

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $M \geq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\text{Có } M \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}-1)}{3(\sqrt{x}+2)} - \frac{2(\sqrt{x}+2)}{3(\sqrt{x}+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-7}{3(\sqrt{x}+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-7 \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x}+2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 49 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x \geq 49$ thì $M \geq \frac{2}{3}$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$.

Chú ý: Dạng $\sqrt{P} < m$ ($m > 0$), trước hết ta cần giải điều kiện phụ $P \geq 0$ để $\sqrt{P}$ xác định, sau đó mới giải $P < m^2$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

* Để $\sqrt{P}$ xác định ta cần có $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x}+1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

* Khi đó $\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}-2)}{4(\sqrt{x}+1)} - \frac{1(\sqrt{x}+1)}{4(\sqrt{x}+1)} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-9 < 0 \text{ (do } \sqrt{x}+1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9.$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 4$, ta được $4 \leq x < 9$.

Đưa về bình phương dạng $m^2 \leq 0; -m^2 \geq 0; m^2+n^2 \leq 0; m^2+\sqrt{n} \leq 0$.

Bước 1: Đặt điều kiện để biểu thức xác định và đưa bất phương trình về dạng

$$m^2 \leq 0; -m^2 \geq 0; m^2+n^2 \leq 0; m^2+\sqrt{n} \leq 0$$

Bước 2: lập luận để giải dấu “=” xảy ra:

- Dạng $m^2 \leq 0$:

Lập luận: Vì $m^2 \geq 0$ nên khẳng định $m^2 \leq 0$ chỉ xảy ra khi $m^2 = 0$.

- Dạng $-m^2 \geq 0$:

Lập luận $-m^2 \leq 0$ nên khẳng định $-m^2 \geq 0$ chỉ xảy ra khi $m = 0$.

- Dạng $m^2+n^2 \leq 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n} \leq 0$):

Lập luận $m^2 \geq 0, n^2 \geq 0$ (hoặc $\sqrt{n} \geq 0$) nên $m^2+n^2 \geq 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n} \geq 0$)

nên khẳng định $m^2+n^2 \leq 0$ (hoặc $m^2+\sqrt{n} \leq 0$) chỉ xảy ra khi đồng thời

$$\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$$

Bước 3: Giải ra x , đối chiếu điều kiện và kết luận.

Ví dụ 1. Cho 2 biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $\frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{Có } \frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B} \Leftrightarrow \frac{x}{4} + 5 \leq \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1} : \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \Leftrightarrow \frac{x}{4} + 5 \leq \sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{4} \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0,$$

Mà $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ nên $(\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0$ chỉ xảy ra khi $\sqrt{x} - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$ thì $\frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}}$. Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a > 0$.

$$\text{Có } \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{a}}{8(\sqrt{a} + 1)} - \frac{(\sqrt{a} + 1)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} - \frac{8(\sqrt{a} + 1)}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a + 6\sqrt{a} - 9}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0$$

Vì $\frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \leq 0$ với mọi $a > 0$ nên $\frac{-(\sqrt{a} - 3)^2}{8(\sqrt{a} + 1)} \geq 0$ chỉ xảy ra khi $\sqrt{a} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow a = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a = 9$ thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1$

4.3 Tìm x để $|A| = A, |A| = -A, |A| > A, |A| > -A$

Ghi nhớ:

$A = A \Leftrightarrow A \geq 0$ $A = -A \Leftrightarrow A \leq 0$	$A > A \Leftrightarrow A < 0$ $A > -A \Leftrightarrow A > 0$
---	---

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$. Tìm x để $|P| > P$

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Có $|P| > P$ khi $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}, \sqrt{x} - 2$ trái dấu.

- $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$ (thỏa mãn điều kiện)
- $\begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 2 > 0 \end{cases}$ (loại).

Vậy $0 < x < 4$ thì $|P| > P$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = \frac{x - 6\sqrt{x} + 9}{x - 9}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất để $|A| = -A$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$\text{Có } A = \frac{x - 6\sqrt{x} + 9}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x} - 3)^2}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$$

Cách 1 (sử dụng $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$)

$$\text{Có } |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \leq 0$$

Mà $\sqrt{x} + 3 > 0$ nên ta được $\sqrt{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$

Kết hợp với điều kiện, ta được $0 \leq x < 9$. Do $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.

Cách 2 (Xét hai trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối)

$$\text{Có } |A| = -A \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \right| = -\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 3| = -\sqrt{x} + 3$$

Trường hợp 1: Xét $\sqrt{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$ (do $x \neq 9$) thì

$$|\sqrt{x} - 3| = -\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 = -\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9$ (do $x \neq 9$) thì

$$|\sqrt{x} - 3| = -\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow -\sqrt{x} + 3 = -\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó ta được $0 \leq x < 9$. Do $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất nên ta tìm được $x = 8$.

Vậy $x = 8$ là giá trị cần tìm

DẠNG 5: SO SÁNH, CHỨNG MINH BẰNG CÁCH XÉT HIỆU

Để chứng minh $X > Y$ ($X \geq Y$) ta chứng minh hiệu $X - Y > 0$ ($X - Y \geq 0$)

Để chứng minh $X < Y$ ($X \leq Y$) ta chứng minh hiệu $X - Y < 0$ ($X - Y \leq 0$)

Để so sánh hai biểu thức X và Y ta xét dấu của hiệu $X - Y$

Để so sánh P với P^2 ta xét hiệu $P - P^2 = P(1 - P)$ rồi thay x vào và xét dấu

- Để so sánh P và $\sqrt{P}$ (khi $\sqrt{P}$ có nghĩa) ta biến đổi hiệu

$$P - \sqrt{P} = \sqrt{P}(\sqrt{P} - 1) = \sqrt{P} \cdot \frac{P - 1}{\sqrt{P} + 1}$$

Sau đó nhận xét $\sqrt{P} \geq 0$, $\sqrt{P} + 1 \geq 0$ nên ta cần xét dấu của $P - 1$.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)}$. Chứng minh $A \geq 1$.

Lời giải

Điều kiện: $a \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } A - 1 &= \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)} - 1 = \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)} - \frac{2(\sqrt{a}+1)}{2(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{2(\sqrt{a}+1)} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{2(\sqrt{a}+1)} \geq 0 \quad \forall a \geq 0 \Rightarrow A \geq 1 \Rightarrow \text{dpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi $A > 0$, hãy so sánh B với 3.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$.

Khi $A > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}+3$ cùng dấu.

Mà $\sqrt{x}+3 > 0$ nên ta được $\sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ (thỏa mãn).

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } B-3 &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 3 = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1} \geq 0 \forall x > 1 \text{ nên } B \geq 3. \end{aligned}$$

Vậy khi $A > 0$ thì $B \geq 3$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh $\left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } \left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5} + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 2 \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}} > 0, \text{ với mọi } x > 0, x \neq 1, x \neq 25 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(A.B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2.$$

Ví dụ 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

So sánh giá trị của biểu thức $\frac{B}{A}$ và 3.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } \frac{B}{A} - 3 &= \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} : \frac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1} - 3 = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} - 3 \\ &= \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{-2}{\sqrt{x}+1} < 0 \text{ với mọi } x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{B}{A} < 3.$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. So sánh P và P^2 .

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } P - P^2 &= P(1-P) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{-3}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)^2} < 0 \quad \forall x \geq 0, x \neq 4 \text{ nên } P < P^2. \end{aligned}$$

Vậy $P < P^2$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{x}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh $\sqrt{P}$ và P .

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$\sqrt{P}$ xác định khi $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{x} \geq 0$, mà $x > 0$ nên $\sqrt{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

$$\text{Xét hiệu } \sqrt{P} - P = \sqrt{P}(1-\sqrt{P}) = \sqrt{P} \cdot \frac{1-P}{1+\sqrt{P}}.$$

Do $\sqrt{P} \geq 0, 1+\sqrt{P} > 0$

$$\text{và } 1-P = 1 - \frac{\sqrt{x}-2}{x} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x} = \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{x} > 0, \forall x \geq 4.$$

suy ra $\sqrt{P} - P \geq 0$ nên $\sqrt{P} \geq P$.

Vậy $\sqrt{P} \geq P$.

DẠNG 6: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

6.1 Dựa vào $x \geq 0$ để Tìm giá trị lớn nhất của $P = a + \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b > 0, c > 0$)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = a - \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b > 0, c > 0$)

Bước 1. Đặt điều kiện $x \geq 0$ và khử x ở tử để đưa P, Q về dạng trên.

Bước 2. Chuyển từng bước từ $\sqrt{x} \geq 0$ sang $P \leq a + \frac{b}{c}; Q \geq a - \frac{b}{c}$ như sau:

Max P	Min Q
Có $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$	Có $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow \sqrt{x+c} \geq c \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow \sqrt{x+c} \geq c \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow a + \frac{b}{\sqrt{x+c}} \leq a + \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$	$\Rightarrow -\frac{b}{\sqrt{x+c}} \geq -\frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
$\Rightarrow P \leq a + \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0.$	$\Rightarrow a - \frac{b}{\sqrt{x+c}} \geq a - \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0$
	$\Rightarrow Q \geq a - \frac{b}{c} \quad \forall x \geq 0.$

Bước 3: Kết luận $\text{Max}P = a + \frac{b}{c}$, $\text{Min}Q = a - \frac{b}{c}$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Từ đó, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{2}{P+3} + 3P$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

* Tìm MinP:

$$\text{Có } P = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{1} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -3 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 1 - 3 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow P \geq -2 \quad \forall x \geq 0$$

Vậy $\text{Min} P = -2$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

* Tìm MinQ:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cô Si)

$$\text{Có } Q = \frac{2}{P+3} + 3P = 2 \left[\frac{1}{P+3} + (P+3) \right] + P - 6$$

$$\text{Do } P \geq -2 \Rightarrow P+3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{P+3} + (P+3) \geq 2\sqrt{\frac{1}{P+3} \cdot (P+3)} = 2$$

$$\text{Vì } P \geq -2 \Rightarrow P-6 \geq -2-6 = -8 \Rightarrow Q \geq 4-8 = -4$$

Vậy $\text{Min}Q = -4$ khi $P = -2$ hay $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

Cách 2: (Thay $P = -2$ được $Q = -4$ nên ta dự đoán $\text{Min}Q = -4$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } Q - (-4) &= \frac{2}{P+3} + 3P + 4 = \frac{2}{P+3} + \frac{(3P+4)(P+3)}{P+3} = \frac{3P^2 + 13P + 14}{P+3} \\ &= \frac{3P^2 + 6P + 7P + 14}{P+3} = \frac{3P(P+2) + 7(P+2)}{P+3} = \frac{(P+2)(3P+7)}{P+3} \end{aligned}$$

Do $P \geq -2 \Rightarrow P+2 \geq 0, P+3 > 0, 3P+7 > 0 \Rightarrow Q - (-4) \geq 0 \Rightarrow Q \geq -4$

Vậy $\text{Min}Q = -4$ khi $P = -2$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$N = M + \frac{12}{M}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

* Tìm Max M:

$$\text{Có } M = \frac{2\sqrt{x}+4+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+2}.$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{2}{2} \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq 2 + 1 \forall x \geq 0 \Rightarrow M \leq 3 \forall x \geq 0.$$

Vậy $\text{Max}M=3$ khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

* Tìm MinN:

Cách 1 (Dùng bất đẳng thức Côsi)

$$\text{Có } N = M + \frac{12}{M} = \left(\frac{4M}{3} + \frac{12}{M} \right) - \frac{M}{3}.$$

$$\text{Do } 2\sqrt{x}+6 > 0, \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow \frac{4M}{3} + \frac{12}{M} \geq 2\sqrt{\frac{4M}{3} \cdot \frac{12}{M}} = 8.$$

$$\text{Vì } M \leq 3 \Rightarrow -\frac{M}{3} \geq -1 \Rightarrow N \geq 8 - 1 = 7.$$

Vậy $\text{Min}N = 7$ khi $M = 3$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2 (Thay $M = 3$ được $N = 7$ nên ta dự đoán $\text{Min}N = 7$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } N - 7 &= M + \frac{12}{M} - 7 = \frac{M^2 - 7M + 12}{M} = \frac{M^2 - 3M - 4M + 12}{M} \\ &= \frac{M(M-3) - 4(M-3)}{M} = \frac{(M-3)(M-4)}{M}. \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 < M \leq 3 \Rightarrow M-3 \leq 0, M-4 < 0, M > 0 \Rightarrow N - 7 \geq 0 \Rightarrow N \geq 7.$$

Vậy $\text{Min}N = 7$ khi $M = 3$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = 3A + \frac{10}{A}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

*) Tìm MaxA:

$$\text{Có } \sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{5}{3} \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{5}{3} \forall x \geq 0$$

Vậy $\text{Max} A = \frac{5}{3}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

+) Tìm MinB:

Cách 1. (Dùng bất đẳng thức Cô si)

$$\text{Có } B = 3A + \frac{10}{A} = \left(\frac{18A}{5} + \frac{10}{A} \right) - \frac{3A}{5}$$

$$\text{Do } 5 > 0, \sqrt{x} + 3 > 0 \Rightarrow A = \frac{5}{\sqrt{x} + 3} > 0 \Rightarrow \frac{18A}{5} + \frac{10}{A} \geq 2\sqrt{\frac{18A}{5} \cdot \frac{10}{A}} = 12$$

$$\text{Vì } A \leq \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{3A}{5} \geq -1 \Rightarrow B \geq 12 - 1 = 11.$$

Vậy Min B = 11 khi $A = \frac{5}{3}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2. (Thay $A = \frac{5}{3}$ được $B = 11$ nên ta dự đoán MinB = 11)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } B - 11 &= 3A + \frac{10}{A} - 11 = \frac{3A^2 - 11A + 10}{A} = \frac{3A^2 - 5A - 6A + 10}{A} \\ &= \frac{A(3A - 5) - 2(3A - 5)}{A} = \frac{(3A - 5)(A - 2)}{A} \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 \leq A \leq \frac{5}{3} \Rightarrow 3A - 5 \leq 0, A - 2 < 0, A > 0 \Rightarrow B - 11 \geq 0 \Rightarrow B \geq 11.$$

Vậy Min B = 11 khi $A = \frac{5}{3}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = -\frac{2}{\sqrt{x} + 4}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 14S + \frac{3}{S + 1}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

* Tìm MinS:

$$\text{Có } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \sqrt{x} + 4 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 4} \leq \frac{2}{4} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x} + 4} \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow S \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{Vậy } \text{Min} S = -\frac{1}{2} \text{ khi } x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

* Tìm MinT:

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Côsi)

$$\text{Có } T = \left[12(S + 1) + \frac{3}{S + 1} \right] + 2S - 12$$

$$\text{Do } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow S + 1 \geq \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 12(S + 1) + \frac{3}{S + 1} \geq 2\sqrt{12(S + 1) \cdot \frac{3}{S + 1}} = 12$$

$$\text{Vì } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2S \geq -1 \Rightarrow T \geq 12 - 1 - 12 = -1$$

$$\text{Vậy } \text{Min} T = -1 \text{ khi } S = -\frac{1}{2} \text{ hay } x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Cách 2: (Thay $S = -\frac{1}{2}$ được $T = -1$ nên ta dự đoán $\min T = -1$)

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } T - (-1) &= 14S + \frac{3}{S+1} + 1 = \frac{14S^2 + 15S + 4}{S+1} = \frac{14S^2 + 7S + 8S + 4}{S+1} \\ &= \frac{7S(2S+1) + 4(2S+1)}{S+1} = \frac{(2S+1)(7S+4)}{S+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do } S \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2S+1 \geq 0, 7S+4 > 0, S+1 > 0 \Rightarrow T - (-1) \geq 0 \Rightarrow T \geq -1$$

Vậy $\min T = -1$ khi $S = -\frac{1}{2}$ hay $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

6.2. Dùng bất đẳng thức Côsi

Bước 1: Khử x ở trên tử.

Bước 2: Dựa vào mẫu để thêm bớt hai vế với một số thích hợp.

Bước 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi $a+b \geq 2\sqrt{ab} \forall a, b \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $a = b$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x} + 10}{\sqrt{x} + 2}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Có } A &= \frac{x - 4 - \sqrt{x} - 2 + 16}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \quad (\text{Mẫu là } \sqrt{x} + 2 \text{ nên } \sqrt{x} - 3 \text{ cần cộng thêm } 5) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A + 5 = (\sqrt{x} + 2) + \frac{16}{\sqrt{x} + 2}.$$

Vì $\sqrt{x} + 2 > 0, \frac{16}{\sqrt{x} + 2} > 0 \forall x \geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(\sqrt{x} + 2) + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x} + 2}} = 2\sqrt{16} = 8.$$

Suy ra $A + 5 \geq 8 \Rightarrow A \geq 3$.

Vậy $\min A = 3$ khi $(\sqrt{x} + 2) = \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Ví dụ 2. Cho $x > 25$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x}{\sqrt{x} - 5}$

Lời giải

Với $x > 25$ thì M luôn xác định.

$$\text{Có } M = \frac{x}{\sqrt{x} - 5} = \frac{x - 25 + 25}{\sqrt{x} - 5} = \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} + \frac{25}{\sqrt{x} - 5} = \sqrt{x} + 5 + \frac{25}{\sqrt{x} - 5}.$$

$$\text{Xét } M - 10 = (\sqrt{x} + 5) + \frac{25}{\sqrt{x} - 5}.$$

Với $x > 25$ thì $\sqrt{x} - 5 > 0, \frac{25}{\sqrt{x} - 5} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x} - 5 + \frac{25}{\sqrt{x} - 5} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} - 5) \cdot \frac{25}{\sqrt{x} - 5}} = 2\sqrt{25} = 10$$

Suy ra $M - 10 \geq 10 \Rightarrow M \geq 20$.

Vậy MinM = 20 khi $\sqrt{x} - 5 = \frac{25}{\sqrt{x} - 5} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5^2 = 25 \Leftrightarrow x = 100$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } P = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Vì $\sqrt{x} > 0, \frac{3}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 2\sqrt{3}$$

Vậy MinP = $2\sqrt{3}$ khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Có } A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right).$$

Vì $9\sqrt{x} > 0, \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \leq -6$$

$$\Rightarrow 1 - \left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \leq 1 - 6 = -5 \Rightarrow P \leq -5.$$

Vậy MaxA = -5 khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

6.3. Đưa về bình phương

- $A^2 \pm m \geq 0 \pm m; A^2 + B^2 \pm m \geq 0 + 0 \pm m.$
- $-A^2 \pm m \leq 0 \pm m; -A^2 - B^2 \pm m \leq 0 + 0 \pm m.$

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{Có } T = P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$$

$$= (x+2-2\sqrt{2x}) + (x-1-2\sqrt{x-1}+1) = (\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0.$$

Vậy $\text{Min}T = 0$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = B - A$ với $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2}$, $x \geq 0, x \neq 4$.

Lời giải

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1.$$

$$B = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}(x - 1) + 2(x - 1)}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 2)(x - 1)}{\sqrt{x} + 2} = x - 1.$$

Suy ra $C = B - A = x - 2\sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 3 \geq -3$.

Vậy $\text{Min}C = -3$ khi $x = 1$ (thỏa mãn).

6.4. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} - m}$ ($m \in N^*$) lớn nhất, nhỏ nhất

Chú ý: Tính chất $a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ chỉ đúng với a và b cùng dương hoặc cùng âm.

Ví dụ:

+) $\sqrt{x} + 3 \geq 3 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{1}{3} \forall x \geq 0$ đúng vì $\sqrt{x} + 3$ và 3 cùng dương.

+) $\sqrt{x} - 2 \geq -2 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \leq \frac{1}{-2} \forall x \geq 0$ sai vì ta chưa biết $\sqrt{x} - 2$ và -2 có cùng âm hay không.

Phương pháp giải

*Tìm MaxA: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - m > 0$ và $\sqrt{x} - m < 0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - m > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > m \Rightarrow x > m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \geq m^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{x} - m \geq \sqrt{m^2 + 1} - m > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - m} \leq \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m} \Rightarrow A \leq \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m}.$$

Vậy $\text{Max}A = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m}$ khi $x = m^2 + 1$.

*Tìm MinA: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - m > 0$ và $\sqrt{x} - m < 0$ thì MinA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - m < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < m \Rightarrow 0 < x < m^2$.

Mà $x \in N$ nên $x \in \{0; 1; 2; \dots; m^2 - 1\}$.

Trường hợp này có hữu hạn giá trị nên ta kẻ bảng để chọn minA.

Ví dụ 1. Tìm $x \in N$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$ đạt giá trị: a) lớn nhất. b) nhỏ nhất.

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \neq 4$.

- a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0$ và $\sqrt{x}-2 < 0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$.

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{5; 6; 7; \dots\} \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \geq \sqrt{5}-2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{3}{\sqrt{5}-2} \Rightarrow A \leq \frac{3}{\sqrt{5}-2} = 6+3\sqrt{5}.$$

Vậy $\text{Max}A = 6+3\sqrt{5}$ khi $x = 5$ (thỏa mãn).

- b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2 > 0$ và $\sqrt{x}-2 < 0$ thì MaxA xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$.

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

x	0	1	2	3
A	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$	$-6-3\sqrt{3}$

Vậy $\text{Min}A = -6-3\sqrt{3}$ khi $x = 3$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị: a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \neq 9$.

$$\text{Có } P = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}.$$

- a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3 > 0$ và $\sqrt{x}-3 < 0$ thì MaxP xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$.

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{10; 11; 12; \dots\} \Rightarrow x \geq 10 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3 \geq \sqrt{10}-3 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{5}{\sqrt{10}-3} \Rightarrow 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3} \leq 1 + \frac{5}{\sqrt{10}-3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}-3} = 16+5\sqrt{10}.$$

Vậy $\text{Max}P = 16+5\sqrt{10}$ khi $x = 10$ (thỏa mãn).

- b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-3 > 0$ và $\sqrt{x}-3 < 0$ thì minP xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9$.

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}.$$

x	0	1	2	...	8
P	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{8+5\sqrt{2}}{7}$	...	$-14-10\sqrt{2}$

Vậy $\text{Min}P = -14-10\sqrt{2}$ khi $x = 8$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị: a) lớn nhất b) nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \neq 1$.

$$\text{Có } M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

a) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-1 > 0$ và $\sqrt{x}-1 < 0$ thì MaxM xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$.

$$\text{Mà } x \in N \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; \dots\} \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} + 1 \Rightarrow M \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy $\text{Max}M = 2 + \sqrt{2}$ khi $x = 2$ (thỏa mãn).

b) Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x}-1 > 0$ và $\sqrt{x}-1 < 0$ thì MinM xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x}-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$.

$$\text{Mà } x \in N \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Min}M = \frac{0}{0-1} = 0.$$

Vậy $\text{Min}M = 0$ khi $x = 0$ (thỏa mãn).

DẠNG 7: TÌM X ĐỂ P NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN

7.1. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P = a + \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

Bước 1 Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa P về dạng như trên.

Bước 2 Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \text{ là số vô tỷ} \Rightarrow a + \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \text{ là số vô tỷ}$$

$$\Rightarrow P \text{ là số vô tỷ} \Rightarrow P \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $P \in \mathbb{Z}$ khi $\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c\sqrt{x}+d \in U(b)$

Ví dụ 1: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện : $x \geq 0$

$$\text{Có } A = \frac{2\sqrt{x}+6-7}{\sqrt{x}+3} = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \text{ là số vô tỷ} \Rightarrow \sqrt{x}+3 \text{ là số vô tỷ}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \text{ là số vô tỷ} \Rightarrow 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+3} \text{ là số vô tỷ}$$

$$\Rightarrow A \text{ là số vô tỷ} \Rightarrow A \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $A \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \text{ mà } \sqrt{x}+3 \geq 3 \text{ nên ta được:}$$

$$\sqrt{x}+3=7 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x=16$ là giá trị cần tìm.

Chú ý:

- P nguyên âm khi $\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P > 0 \end{cases}$

Bước 1: Giải $P \in \mathbb{Z}$ giống như ví dụ 1.

Bước 2: Kẻ bảng để chọn $P > 0$ hoặc giải $P > 0$ rồi kết hợp $P \in \mathbb{Z}$

- P là số tự nhiên khi $\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P \geq 0 \end{cases}$

Bước 1. Giải $P \in \mathbb{Z}$ giống như ví dụ 1.

Bước 2: Kẻ bảng để chọn $P \geq 0$ hoặc giải $P \geq 0$ rồi kết hợp $P \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên âm

Lời giải:

$$M = \frac{\sqrt{x}-3+6}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$$

$$M \text{ nguyên âm khi } \begin{cases} M \in \mathbb{Z} \\ M < 0 \end{cases}$$

- $M \in \mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ $1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow M$ là số vô tỷ $\Rightarrow M \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow M \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{6}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

$\sqrt{x}-3$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$\sqrt{x}$	4	2	5	1	6	0	9	-3
x	16	4	25	1	36	0	81	ϕ

$\Rightarrow x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\}$ (thỏa mãn điều kiện)

- $M < 0$:

Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	4	16	25	36	81
M	-1	-2	-7	7	4	3	2

Từ bảng trên ta được $x \in \{0; 1; 4\}$ thì M có giá trị là số nguyên âm

Cách 2: (Giải $M < 0$)

$$M < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \left(\text{do } \sqrt{x}+3 > 0 \right) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9 \text{ Kết hợp với}$$

$x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\}$ ta được $x \in \{0; 1; 4\}$

Vậy $x \in \{0; 1; 4\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Lời giải:

Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Có } P = \frac{2\sqrt{x}-4+4}{\sqrt{x}-2} = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}-2}$$

P nhận giá trị là một số tự nhiên khi $\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P \geq 0 \end{cases}$

- $P \in \mathbb{Z}$:

Trường hợp 1: Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-2$ là số vô tỷ

$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ $2 + \frac{4}{\sqrt{x}-2}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow P$ là số vô tỷ $\Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 2: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow P \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{4}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

$\sqrt{x}-2$	1	-1	2	-2	4	-4
$\sqrt{x}$	3	1	4	0	6	-2
x	9	1	16	0	36	ϕ

$\Rightarrow x \in \{0; 1; 9; 16; 36\}$ (thỏa mãn điều kiện)

- $P \geq 0$:

Cách 1: (Kẻ bảng để thử trực tiếp các giá trị)

x	0	1	9	16	36
P	0	-2	6	4	3

Từ bảng trên ta được $x \in \{0; 9; 16; 36\}$ thì M có giá trị là một số tự nhiên

Cách 2 (Giải $P \geq 0$)

$$P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với $x \in \{0; 1; 9; 16; 36\}$ ta được $x \in \{0; 9; 16; 36\}$

Vậy $x \in \{0; 9; 16; 36\}$ là các giá trị cần tìm

Chú ý: Dạng tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P = a\sqrt{x} + b + \frac{m}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} (a, b, c, d, m \in \mathbb{Z})$ thì khi giải ta vẫn phải xét trường hợp $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ và trường hợp $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $F = \frac{x-2}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$

Lời giải:

Điều kiện : $x \geq 0 ; x \neq 9$

$$\text{Có } F = \frac{x-9+7}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{7}{\sqrt{x}-3}$$

Trường hợp 1: Xét $x=2 \Rightarrow F=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x \neq 2 ; x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ $\frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ là số vô tỷ

Mà $x-2$ là số nguyên khác 0 nên $\frac{x-2}{\sqrt{x}-3}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow F$ là số vô tỷ $\Rightarrow F \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Trường hợp 3: Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

Vì $\sqrt{x}+3 \in \mathbb{Z}$ nên $F \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{7}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

$\sqrt{x}-3$	1	-1	7	-7
	4	2	10	-4
x	16	4	100	

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy là các giá trị cần tìm

7.2. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $P = \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z} (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

Bước 1 Đặt điều kiện và chặn hai đầu của P :

• $a > 0, b\sqrt{x}+c > 0 \Rightarrow P > 0$.

• $b\sqrt{x}+c \geq c \Rightarrow \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \leq \frac{a}{c} \Rightarrow P \leq \frac{a}{c}$.

Như vậy ta chặn hai đầu của P là $0 < P \leq \frac{a}{c}$.

Bước 2 Chọn $P \in \mathbb{Z}, 0 < P \leq \frac{a}{c}$. Từ đó suy ra x .

Ví dụ 1. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên :

$$a) A = \frac{10}{\sqrt{x}+3} \quad b) P = \frac{5}{3\sqrt{x}+2}$$

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0$

a) Vì $10 > 0, \sqrt{x}+3 > 0$ nên $A > 0$

$$\text{Mặt khác, } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{10}{3} \Rightarrow A \leq \frac{10}{3}$$

Do đó $0 < A \leq \frac{10}{3}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x}+3} = 1 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3} = 2 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = \sqrt{x}+3 \\ 10 = 2\sqrt{x}+6 \\ 10 = 3\sqrt{x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 7 \\ \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 49 \\ x = 4 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x \in \left\{49; 4; \frac{1}{9}\right\}$ là giá trị cần tìm.

b) Vì $5 > 0, 3\sqrt{x}+2 > 0$ nên $P > 0$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{3\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$$

Do $0 < P \leq \frac{5}{2}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} P=1 \\ P=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{3\sqrt{x}+2} = 1 \\ \frac{5}{3\sqrt{x}+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3\sqrt{x}+2 \\ 5 = 6\sqrt{x}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{36} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{1; \frac{1}{36}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý: Với bài toán $x \in \mathbb{R}$ để $m \pm \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}$)

Bước 1: Lập luận: Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \pm \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Giải theo cách chặn 2 đầu của $\frac{a}{b\sqrt{x}+c}$ như **ví dụ 1**.

Ví dụ 2: Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để các biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

$$a) A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} \quad b) P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$a) \text{ Có } A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi $B = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z}$

Vì $3 > 0, \sqrt{x}+1 > 0$ nên $B > 0$

Mặt khác $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \leq 3$

Do đó: $0 < B \leq 3 \Rightarrow B \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} B=1 \\ B=2 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+1}=1 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=2 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{x}+1 \\ 3=2\sqrt{x}+2 \\ 3=3\sqrt{x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{4}; 4\right\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Có $P = \frac{\sqrt{x}+2-5}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$. Vì $1 \in \mathbb{Z}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khi $Q = \frac{5}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z}$

Vì $5 > 0; \sqrt{x}+2 > 0$ nên $Q > 0$

Mặt khác ta có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow Q \leq \frac{5}{2}$

Do đó, $0 < Q \leq \frac{5}{2} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} Q=1 \\ Q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x}+2}=1 \\ \frac{5}{\sqrt{x}+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2=5 \\ \sqrt{x}+2=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$ là các giá trị cần tìm.

DẠNG 8: TÌM THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH $P = m$ CÓ NGHIỆM

Bước 1: Đặt điều kiện để P xác định

Bước 2: Từ $P = m$ rút $\sqrt{x}$ theo m .

Bước 3: Dựa vào điều kiện của x để giải m .

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình $P = m$ có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\text{Có } P = m \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = m \Rightarrow m(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}-1 \Rightarrow (m-1)\sqrt{x} = -2m-1.$$

* Xét $m=1 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = -3$ (loại)

$$\text{*Xét } m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-2m-1}{m-1}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{-2m-1}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m-1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1. \text{ Vậy } -\frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 0, x \neq 4$

$$\text{Có } \frac{A}{B} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m(\sqrt{x}+2) = 8 \Rightarrow m\sqrt{x} = 8-2m$$

*Xét $m=0 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 8$ (loại)

$$* \text{Xét } m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{8-2m}{m}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} \neq 2$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{8-2m}{m} \geq 0, \frac{8-2m}{m} \neq 2$

$$+ \text{Giải } \frac{8-2m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Giải } \frac{8-2m}{m} \neq 2 \Leftrightarrow 8-2m \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 2$$

Như vậy $0 < m \leq 4, m \neq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 3; 4\}$

Vậy $m \in \{1; 3; 4\}$ là giá trị cần tìm.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

Bài 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$

Bài 2. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ khi:

a) $x = 36$

b) $x = 6 - 2\sqrt{5}$

c) $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$

d) $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) $x = \frac{6}{3-\sqrt{7}} - 2\sqrt{7} - \frac{\sqrt{28}-\sqrt{21}}{2-\sqrt{3}}$

f) $x = \frac{4}{\sqrt{3}+2} - \frac{4}{\sqrt{3}-2}$

g) $x = \frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-1}}{18}$

h) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

Bài 6. Cho biểu thức: $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P = \frac{13}{3}$.

Bài 7. Cho biểu thức $M = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$

Bài 8. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A = B \cdot |x-4|$.

Bài 9. Cho hai biểu thức $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $A = B \cdot |\sqrt{x}-3|$.

Bài 10. Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Bài 11. Cho biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

Bài 12. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $81x^2 - 18x = A - 9\sqrt{x} + 4$

Bài 13. Cho hai biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = x\sqrt{x} - x$. Tìm x để $x^2 + 6 = A \cdot B + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Bài 14. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $A \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$.

Bài 15. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A < 1$

Bài 16. Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $M \geq \frac{2}{3}$

Bài 17. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài 18. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Tìm x để $\frac{x}{4} + 5 \leq \frac{A}{B}$.

Bài 19. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a}+1}{8} \geq 1$

Bài 20. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $|P| > P$.

Bài 21. Cho biểu thức $A = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ và x lớn nhất để $|A| = -A$

Bài 22. Cho biểu thức $A = \frac{a+3}{2(\sqrt{a}+1)}$. Chứng minh $A \geq 1$

Bài 23. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi $A > 0$, hãy so sánh B với 3.

Bài 24. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$, $B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh $\left(A \cdot B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} > 2$

Bài 25. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. So sánh giá trị của biểu thức $\frac{B}{A}$ và 3

Bài 26. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. So sánh P và P^2 .

Bài 27. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{x}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh $\sqrt{P}$ và P

Bài 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{2}{P+3} + 3P.$$

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$N = M + \frac{12}{M}.$$

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$.

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3A + \frac{10}{A}$.

Bài 31. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = -\frac{2}{\sqrt{x}+4}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 14S + \frac{3}{S+1}$$

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x-\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}+2}$.

Bài 33. Cho $x > 25$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x}{\sqrt{x}-5}$.

Bài 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.

Bài 35. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x}$.

Bài 36. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = P \cdot \sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$.

Bài 37. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = B - A$

với $A = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}, x \geq 0, x \neq 4$.

Bài 38. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị

a) lớn nhất

b) nhỏ nhất

Bài 39. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ đạt giá trị

a) lớn nhất

b) nhỏ nhất

Bài 40. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị

a) lớn nhất

b) nhỏ nhất

Bài 41. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 42. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên âm.

Bài 43. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là một số tự nhiên.

Bài 44. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $F = \frac{x-2}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$.

Bài 45. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên:

a. $A = \frac{10}{\sqrt{x}+3}$

b. $P = \frac{5}{3\sqrt{x}+2}$

Bài 46. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để các biểu thức sau nhận giá trị là số nguyên:

a. $A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$

b. $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

Bài 47. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình $P = m$ có nghiệm.

Bài 48. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm.