

CHỦ ĐỀ 2 – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ	1
DẠNG 1: HỆ ĐA THỨC BẬC NHẤT ĐỐI VỚI X VÀ Y.....	1
DẠNG 2: HỆ CHỨA PHÂN THỨC.....	2
DẠNG 3: HỆ CHỨA CĂN	4
DẠNG 4: HỆ THỨC CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI.....	6
II. HỆ CHỨA THAM SỐ.....	9
HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ	12
I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ	12
II. HỆ CHỨA THAM SỐ	12

I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1: HỆ ĐA THỨC BẬC NHẤT ĐỐI VỚI X VÀ Y

Cách giải Rút gọn về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn dạng:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+4)(y+4) = xy + 216 \\ (x+2)(y-5) = xy - 50 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } \begin{cases} (x+4)(y+4) = xy + 216 \\ (x+2)(y-5) = xy - 50 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 4x + 4y + 16 = xy + 216 \\ xy - 5x + 2y - 10 = xy - 50 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 200 \\ -5x + 2y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ -5x + 2y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 140 \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases} \\ \text{Vậy: } (x; y) &= (20; 30) \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x+1) + 3(x+y) = 15 \\ 4(x-1) - (x+2y) = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} 2(x+1) + 3(x+y) = 15 \\ 4(x-1) - (x+2y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 + 3x + 3y = 15 \\ 4x - 4 - x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 26 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 38 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \text{Vậy: } (x; y) &= (2; 1) \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases} \quad (3)$$

Lời giải

Cách 1: (Giải trực tiếp)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3+2x+4y=4 \\ 4x+4-x-2y=9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=1 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=1 \\ 6x-4y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=11 \\ 5x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: $(x; y) = (1; -1)$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } \begin{cases} a = x+1 \\ b = x+2y \end{cases} &\Rightarrow (3): \begin{cases} 3a+2b=4 \\ 4a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=4 \\ 8a-2b=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a=22 \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: $(x; y) = (1; -1)$.

DẠNG 2: HỆ CHỨA PHÂN THỨC

Bước 1: Đặt điều kiện cho hệ phương trình.

Bước 2: Giải bằng cách đặt ẩn phụ hoặc quy đồng giải trực tiếp.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1, y \neq -2$

Cách 1: Đặt ẩn phụ

Đặt $a = \frac{1}{x-1}, b = \frac{1}{y+2}$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2a+b=2 \\ 8a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b=6 \\ 8a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a=7 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy: $(x; y) = (3; -1)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

$$\begin{aligned} \text{Có } \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 6 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{x-1} = 7 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ \frac{3}{y+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (3; -1)$

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 3(y+1) = 5 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x + y \neq 0$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{1}{x+y} = a$; $y+1 = b$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6b = 10 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b = 11 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $(x; y) = (\frac{1}{2}; 0)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

Có
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 3(y+1) = 5 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x+y} + 6(y+1) = 10 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11(y+1) = 11 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $(x; y) = (\frac{1}{2}; 0)$

Ví dụ 3 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \quad (1) \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+2} = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1$; $y \neq -2$

Trước hết ta khử x , trên tử trong phương trình (2) của hệ

Có
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3x+3-3}{x+1} + \frac{4y+8-8}{y+2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ 3 - \frac{3}{x+1} + 4 - \frac{8}{y+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{8}{y+2} = 5 \end{cases}$$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{1}{x+1} = a$; $\frac{1}{y+2} = b$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a - 2b = -3 \\ 3a + 8b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 8b = -12 \\ 3a + 8b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = -7 \\ 3a + 8b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x+1} = -1 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $(x; y) = (-2; -1)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

$$\text{Có } \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{8}{y+2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x+1} - \frac{8}{y+2} = -12 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{8}{y+2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x+1} = -7 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{8}{y+2} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} = -1 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $(x; y) = (-2; -1)$

DẠNG 3: HỆ CHỨA CĂN

Bước 1: Đặt điều kiện xác định của hệ

Bước 2: Giải bằng cách đặt hai ẩn phụ cho gọn hoặc giải trực tiếp

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y-2} = 8 \\ 3\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y-2} = -1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$; $y \geq 2$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{y-2} = b$ (điều kiện $a \geq 0$; $b \geq 0$) hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b = 16 \\ 9a - 6b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = 13 \\ 3a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{y-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ y-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $(x; y) = (0; 6)$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

$$\begin{aligned} \text{Có } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y-2} = 8 \\ 3\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y-2} = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x+1} + 6\sqrt{y-2} = 16 \\ 9\sqrt{x+1} - 6\sqrt{y-2} = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13\sqrt{x+1} = 13 \\ 3\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{y-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ \text{Vậy } (x; y) &= (0; 6) \end{aligned}$$

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{3x-4} + 3\sqrt{y+1} = 2 \\ \frac{3}{3x-4} + 5\sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq \frac{4}{3}; y \geq -1$

Cách 1: (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{1}{3x-4} = a; \sqrt{y+1} = b$ điều kiện $b \geq 0$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a + 3b = 2 \\ 3a + 5b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9b = 6 \\ 3a + 5b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 2 \\ 3a + 5b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{3x-4} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy } (x; y) = (2; -\frac{3}{4})$$

Cách 2: (Giải trực tiếp)

$$\begin{aligned} \text{Có } \begin{cases} \frac{1}{3x-4} + 3\sqrt{y+1} = 2 \\ \frac{3}{3x-4} + 5\sqrt{y+1} = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3x-4} + 9\sqrt{y+1} = 6 \\ \frac{3}{3x-4} + 5\sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{y+1} = 2 \\ \frac{3}{3x-4} + 5\sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3x-4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy } (x; y) = (2; -\frac{3}{4}) \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $2x - y > 0, x + y \neq 0$.

Trước hết ta khử x, y ở trên tử trong phương trình sau của hệ:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7}{x+y} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7}{x+y} = 2 \end{cases}$$

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Đặt $a = \frac{4}{\sqrt{2x-y}}, b = \frac{7}{x+y}$ (điều kiện: $a > 0, b \neq 0$), hệ trở thành

$$\begin{cases} 4a - 3b = \frac{1}{2} \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = \frac{1}{2} \\ 9a + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = \frac{13}{2} \\ 9a + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-y}} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{x+y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $(x; y) = (6; 8)$.

Cách 2 (Giải trực tiếp)

$$\begin{aligned} \text{Có} \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7}{x+y} = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{9}{\sqrt{2x-y}} + \frac{21}{x+y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{\sqrt{2x-y}} = \frac{13}{2} \\ \frac{9}{\sqrt{2x-y}} + \frac{21}{x+y} = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-y}} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{x+y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (6; 8)$.

DẠNG 4: HỆ THỨC CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bước 1 Đặt điều kiện xác định của hệ.

Bước 2 Giải bằng cách đặt hai ẩn phụ cho gọn hoặc giải trực tiếp.

$$\text{Ví dụ 1. Giải hệ phương trình} \begin{cases} |x+2| + 4\sqrt{y-1} = 5 \\ 3|x+2| - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq 1$.

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

Đặt $a = |x+2|, b = \sqrt{y-1}$ (điều kiện: $a \geq 0, b \geq 0$), hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+4b=5 \\ 3a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b=5 \\ 6a-4b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=7 \\ a+4b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} |x+2|=1 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\pm 1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Cách 2 (Giải trực tiếp)

$$\text{Có } \begin{cases} |x+2|+4\sqrt{y-1}=5 \\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|+4\sqrt{y-1}=5 \\ 6|x+2|-4\sqrt{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|x+2|=7 \\ 3|x+2|-2\sqrt{y-1}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|=1 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\pm 1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|1-2y|} = 3 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq 0, x \neq 9, y \neq \frac{1}{2}. \text{ Do } |1-2y|=|2y-1| \text{ nên hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 3 \end{cases}$$

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

$$\text{Đặt } a = \frac{4}{\sqrt{x}-3}, b = \frac{1}{|2y-1|} \text{ (điều kiện: } a \neq 0, b > 0 \text{)}, \text{ hệ đã cho trở thành}$$

$$\begin{cases} 2a+b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{|2y-1|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=2 \\ |2y-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ 2y-1=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=25 \\ y=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Cách 2 (Giải trực tiếp)

$$\text{Có } \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|1-2y|} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{|2y-1|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=25 \\ y=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=25 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=25 \\ y=0 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x+\sqrt{y+3}=-1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq -3$.

Cách 1 (Đặt ẩn phụ)

$$\text{Có } \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x+\sqrt{y+3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x-2+\sqrt{y+3}=-3 \end{cases}$$

Đặt $a = x-2$; $b = \sqrt{y+3}$ (điều kiện: $b \geq 0$), hệ trở thành

$$\begin{cases} |a|+2b=9 \\ a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|+2b=9 \\ 2a+2b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow |a|-2a=15.$$

Trường hợp 1: Xét $a \geq 0$ thì $|a|-2a=15 \Leftrightarrow a-2a=15 \Leftrightarrow a=-15$ (loại).

Trường hợp 2: Xét $a < 0$ thì $|a|-2a=15 \Leftrightarrow -a-2a=15 \Leftrightarrow a=-5$ (thỏa mãn).

Suy ra $x-2=-5 \Leftrightarrow x=-3$.

Thay $x=-3$ vào $x+\sqrt{y+3}=-1$ ta được $-3+\sqrt{y+3}=-1 \Leftrightarrow y=1$ (thỏa mãn).

Vậy $(x; y) = (-3; 1)$.

Cách 2 (Giải trực tiếp)

$$\text{Có } \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ x+\sqrt{y+3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+2\sqrt{y+3}=9 \\ 2x+2\sqrt{y+3}=-2 \end{cases} \Rightarrow |x-2|-2x=11.$$

Trường hợp 1: Xét $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì

$$|x-2|-2x=11 \Leftrightarrow x-2-2x=11 \Leftrightarrow x=-13 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: Xét $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ thì

$$|x-2|-2x=11 \Leftrightarrow -x+2-2x=11 \Leftrightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $(x; y) = (-3; 1)$.

II. HỆ CHỨA THAM SỐ

Bài toán thường gặp: Cho hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ chứa tham số m.

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1 Dùng phương pháp thế, cộng, trừ để đưa hệ đã cho về phương trình bậc nhất một ẩn $Ax = B$.

Bước 2: Lập luận: Hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình $Ax = B$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow A \neq 0$

Bước 3: Giải nghiệm $(x; y)$ theo m và xử lý điều kiện của bài toán.

Chú ý:

* Hệ vô nghiệm khi phương trình $Ax = B$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

* Hệ vô số nghiệm khi phương trình $Ax = B$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

* Đối với hệ: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ khi $a', b', c' \neq 0$ thì ta có các điều kiện sau:

+ Hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

+ Hệ vô nghiệm $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

+ Hệ vô số nghiệm $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + my = 2m + 18 \end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x; y)$ là nghiệm duy nhất ở trên, hãy tìm m để:

a) $2x - 3y > 0$.

b) Cả x và y là các số nguyên.

c) Biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Từ $2x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x$, thay vào $4x + my = 2m + 18$ ta được

$$4x + m(8 - 2x) = 2m + 18 \Leftrightarrow (4 - 2m)x = 18 - 6m \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 4 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

$$\text{Khi đó } x = \frac{18 - 6m}{4 - 2m} = \frac{3m - 9}{m - 2} \Rightarrow y = 8 - 2x = 8 - 2 \cdot \frac{3m - 9}{m - 2} = \frac{2m + 2}{m - 2}$$

Vậy $m \neq 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{3m - 9}{m - 2}; \frac{2m + 2}{m - 2} \right)$.

$$2. a) \text{ Có } 2x - 3y > 0 \Leftrightarrow \frac{6m - 18}{m - 2} - \frac{6m + 6}{m - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-24}{m - 2} > 0$$

$$\Leftrightarrow m - 2 < 0 \text{ (do } -24 < 0) \Leftrightarrow m < 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m < 2$ thì $2x - 3y > 0$.

$$\text{b) Có } \begin{cases} x = \frac{3m-9}{m-2} = \frac{3m-6-3}{m-2} = 3 - \frac{3}{m-2} \\ y = \frac{2m+2}{m-2} = \frac{2m-4+6}{m-2} = 2 + \frac{6}{m-2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó cả } x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 : m-2 \\ 6 : m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m-2 \in UC(3;6) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{3; 1; 5; -1\} \text{ (thỏa mãn } m \neq 2)$$

Vậy $m \in \{3; 1; 5; -1\}$ thì cả x và y là các số nguyên.

$$\text{c) } S = x^2 + y^2 = \left(3 - \frac{3}{m-2}\right)^2 + \left(2 + \frac{6}{m-2}\right)^2$$

$$\text{Đặt } a = \frac{3}{m-2}, \text{ thì } S = (3-a)^2 + (2+2a)^2 = 5a^2 + 2a + 13 \\ = 5\left(a^2 + \frac{2}{5}a + \frac{13}{5}\right) = 5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} \geq \frac{64}{5}.$$

$$\text{Vậy } \min S = \frac{64}{5} \text{ khi } a = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{3}{m-2} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow m = -13 \text{ (thỏa mãn } m \neq 2).$$

$$\text{d) Có } T = xy = \left(3 - \frac{3}{m-2}\right)\left(2 + \frac{6}{m-2}\right)$$

$$\text{Đặt } a = \frac{3}{m-2}, \text{ ta được } T = (3-a)(2+2a) = -2a^2 + 4a + 6 = -2(a-1)^2 + 8 \leq 8.$$

$$\text{Vậy } \max T = 8 \text{ khi } a = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn } m \neq 2).$$

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 2m - 1 \\ 2x - my = 9 - 3m \end{cases}$ với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x; y)$ là nghiệm duy nhất ở trên:

a) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

b) Tìm m nguyên để cả x và y là các số nguyên.

c) Tìm m để biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Tìm m để biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$1. \text{ Từ } mx - 2y = 2m - 1 \Rightarrow y = \frac{mx - 2m + 1}{2}, \text{ thay vào } 2x - my = 9 - 3m \text{ ta được}$$

$$2x - m \cdot \frac{mx - 2m + 1}{2} = 9 - 3m \Leftrightarrow (4 - m^2)x = 18 - 5m - 2m^2 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2.$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{18 - 5m - 2m^2}{4 - m^2} = \frac{2m^2 + 5m - 18}{m^2 - 4} = \frac{(m-2)(2m+9)}{(m-2)(m+2)} = \frac{2m+9}{m+2}$$

$$y = \frac{1}{2} \left(m \cdot \frac{2m+9}{m+2} - 2m + 1 \right) = \frac{3m+1}{m+2}.$$

Vậy $m \neq \pm 2$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{2m+9}{m+2}; \frac{3m+1}{m+2} \right)$.

2. a) Có $(x; y) = \left(\frac{2m+4+95}{m+2}; \frac{3m+6-5}{m+2} \right) = \left(2 + \frac{5}{m+2}; 3 - \frac{5}{m+2} \right)$.

Suy ra $x + y = \left(2 + \frac{5}{m+2} \right) + \left(3 - \frac{5}{m+2} \right) = 5$ không phụ thuộc m .

Vậy $x + y = 5$ là hệ thức cần tìm.

b) Có $(x; y) = \left(2 + \frac{5}{m+2}; 3 - \frac{5}{m+2} \right)$

Do đó cả $x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5 : m+2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$m \in \{-1; -3; 3; -7\}$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

Vậy $m \in \{-1; -3; 3; -7\}$ thì x và y là các số nguyên.

c) Có $S = x^2 + y^2 = \left(2 + \frac{5}{m+2} \right)^2 + \left(3 - \frac{5}{m+2} \right)^2$

Đặt $a = \frac{5}{m+2}$, ta được $S = (2+a)^2 + (3-a)^2 = 2a^2 - 2a + 13$.

Xét $2S = 4a^2 - 4a + 26 = (2a-1)^2 + 25 \geq 25 \Rightarrow S \geq \frac{25}{2}$.

Vậy $\text{Min} S = \frac{25}{2}$ khi $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{m+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 8$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

d) Có $T = xy = \left(2 + \frac{5}{m+2} \right) \left(3 - \frac{5}{m+2} \right)$

Đặt $a = \frac{5}{m+2}$, ta được $T = (2+a)(3-a) = -a^2 + a + 6 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$.

Vậy $\text{Max} T = \frac{25}{4}$ khi $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{m+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 8$ (thỏa mãn $m \neq 2$).

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. HỆ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Giải các hệ phương trình sau

Bài 1.
$$\begin{cases} (x+4)(y+4) = xy + 216 \\ (x+2)(y-5) = xy - 50 \end{cases}$$

Bài 3.
$$\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases}$$

Bài 5.
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 3(y+1) = 5 \\ \frac{2}{x+y} - 5(y+1) = -1 \end{cases}$$

Bài 7.
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y-2} = 8 \\ 3\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y-2} = -1 \end{cases}$$

Bài 9.
$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases}$$

Bài 11.
$$\begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x-3}} + \frac{11}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{|1-2y|} = 3 \end{cases}$$

Bài 2.
$$\begin{cases} 2(x+1) + 3(x+y) = 15 \\ 4(x-1) - (x+2y) = 0 \end{cases}$$

Bài 4.
$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases}$$

Bài 6.
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y+2} = -3 \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+2} = 2 \end{cases}$$

Bài 8.
$$\begin{cases} \frac{1}{3x-4} + 3\sqrt{y+1} = 2 \\ \frac{3}{3x-4} + 5\sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Bài 10.
$$\begin{cases} |x+2| + 4\sqrt{y-1} = 5 \\ 3|x+2| - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$$

Bài 12.
$$\begin{cases} |x-2| + 2\sqrt{y+3} = 9 \\ x + \sqrt{y+3} = -1 \end{cases}$$

II. HỆ CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + my = 2m + 18 \end{cases}$$
 với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x; y)$ là nghiệm duy nhất ở trên, hãy tìm m để:

a) $2x - 3y > 0$.

b) Cả x và y là các số nguyên.

c) Biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - 2y = 2m - 1 \\ 2x - my = 9 - 3m \end{cases}$$
 với m là tham số.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Với $(x; y)$ là nghiệm duy nhất ở trên:

a) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

- b) Tìm m nguyên để cả x và y là các số nguyên.
- c) Tìm m để biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- d) Tìm m để biểu thức $T = xy$ đạt giá trị lớn nhất.